MAGYAR PEDAGÓGIA
105. évf. 1. szám 59–82. (2005)

A TUDÁSSZERKEZET ÉS A TUDÁS SZERVEZŐDÉSÉNEK VIZSGÁLATA A TUDÁSTÉR-ELMÉLET ALAPJÁN

Tóth Zoltán
Debrecen Egyetem, Természettudományi Kar, Kémia Szakmódszertani Részleg

A tudás szerveződésének vizsgálatára gyakran használunk gráfelméleti modelleket, hálózatokat (*Csapó*, 1992; *Dobi*, 2002). A napi tanítási gyakorlatban is használható fogalmi térképek elsősorban az egyedi tanulók tudásreprezentációjának feltárására alkalmasak (*Kagan*, 2001; *Kiss* és *Tóth*, 2002; *Taber*, 2002). Mind individuális, mint kollektív elemzésekre használható a – már számítógépes értékelést igénylő – Galois-gráf (*Takács*, 1997, 2000). Külföldi kutatási eredmények szerint alkalmas a tudásszerkezet, a tudás szerveződésének és a tudásszerkezet változásának vizsgálatára a valószínűségi elemeket is figyelembe vevő sokdimenziós modell, a *tudástér-elmélet* (*knowledge space theory*, rövidítve: KST), amelyben az ismeretek kognitív szerveződését egy jól tagolt tudástérrel próbáljuk leírni (*Taagepera* és mtsai, 1997).

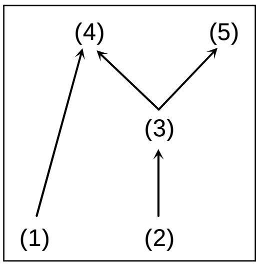
A tudástér-elmélet alapjai

A tudástér-elméletet matematikai pszichológusok, elsősorban *Jean-Paul Doignon* és *Jean-Claude Falmagne* fejlesztették ki 1982-től kezdődően. A tudástér-elmélet alapjait, legfontosabb fogalmait bemutató fejezetet elsősorban „Knowledge Spaces" című könyvük (*Doignon* és *Falmagne*, 1999), két közleményük (*Falmagne* és mtsai, 1990; *Falmagne* és mtsai, é. n.) és egy tematikus gyűjteményben (*Albert*, 1994) megjelent tanulmányok alapján állítottam össze. (Megjegyzem, hogy a tudástér-elmélettel kapcsolatban bőséges leírás és számos irodalmi hivatkozás található a következő két internet címen: *wundt.uni-graz.at/kst.html* és *www.aleks.com*.)

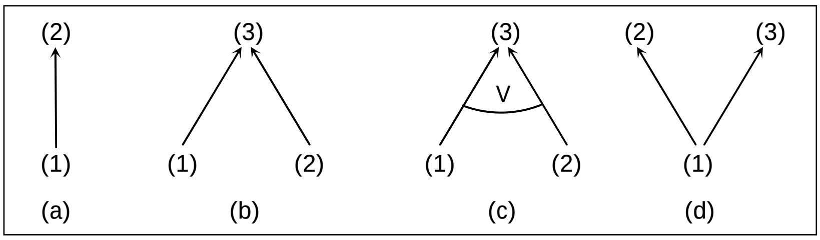
A tudástér-elmélet fontosabb fogalmai és alapfeltevése

A *tudástér* (*knowledge space*) egy adott témakör (pl. tantárgy) megértéséhez szükséges tudás összessége. A matematikában és a természettudományokban ez általában problémák (feladatok) olyan csoportját jelenti, amelyet a tanulónak tudása alapján tudnia kellene megoldani. Ezek a problémák, illetve a megoldásukhoz szükséges ismeretek többé-kevésbé hierarchikus rendszert képeznek. Vegyük például azt az egyszerű esetet, hogy a vizsgált tudástér mindössze öt elemet tartalmaz, és ennek megfelelően összeállítottunk egy öt feladatból álló tesztet. Tételezzük fel, hogy az egyes feladatok megoldásához szükséges tudás alapján az öt feladat az 1. ábrán látható hierarchikus rendszert képezi.

Ezt a hierarchiát szemléletesen egy irányított gráffal fejezhetjük ki, amelyet szokás *Hasse-diagram*nak is nevezni. A *Hasse*-diagram leggyakoribb építőelemeit a 2. ábrán láthatjuk. Olvasata: *(a)* a (2)-es feladat megoldásának előfeltétele az (1)-es feladat megoldása; *(b)* a (3)-as feladat megoldásának előfeltétele az (1)-es *és* a (2)-es feladat megoldása; *(c)* a (3)-as feladat megoldásának előfeltétele az (1)-es *vagy* a (2)-es feladat megoldása; *(d)* az (1)-es feladat megoldása előfeltétele mind a (2)-es, mind a (3)-as feladatának. Az 1. ábrán látható hierarchia tehát azt jelenti, hogy például az (1)-es feladat megoldásához szükséges tudás az (1)-es feladat megoldásán kívül csak a (4)-es feladat megoldásához szükséges. Ugyanakkor a (2)-es feladat megoldásához szükséges tudásra épül a (3)-as, a (4)-es és az (5)-ös feladat megoldása is. (Ennek az ún. szakértői hierarchiának a meghatározásáról később lesz szó.)



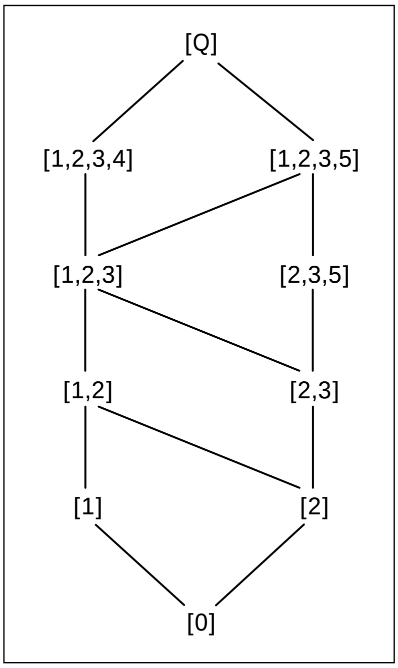
1. ábra
A feladatok hierarchiáját szemléltető Hasse-diagram



2. ábra
A feladatok hierarchiáját leíró Hasse-diagram építőelemei

A tudástér-elmélet *alapfeltevése* (*surmise relation*) a következő: Ha egy tanuló meg tud oldani egy, a hierarchiában magasabb szinten álló feladatot, akkor várható, hogy minden olyan feladatot meg tud oldani, amely a hierarchiában e feladat alatt helyezkedik el. Az 1. ábrán bemutatott példánk esetén ez azt jelenti, hogy ha egy tanuló meg tudja oldani a (4)-es feladatot, akkor birtokában van mindazon tudásnak, amelyek az (1)-es, a (2)-es és a (3)-as feladatok megoldásához szükséges. Várható tehát, hogy a (4)-es feladaton kívül megoldja az (1)-es, a (2)-es és a (3)-as feladatokat is. (Nem szükségszerű azonban, hogy meg tudja oldani az (5)-ös feladatot, hiszen az ennek megoldásához szükséges tudás csak annyiban egyezik meg a (4)-es feladatéval, hogy mindkettő épül a (2)-es és a (3)-as feladat megoldásához szükséges tudása.)

Minden tanulóhoz rendelhetünk egy *tudásállapot*ot (*knowledge state*), amely azon problémák összessége, amelyeket a tanuló helyesen oldott meg. Ha például a tanuló az előbbi öt feladatot tartalmazó felmérés során helyesen oldotta meg a (2)-es, a (3)-as és az (5)-ös feladatokat, akkor tudásállapota: [2,3,5]. Amennyiben egyetlen egy feladatot sem tudott megoldani, akkor tudásállapota: [0], ha viszont valamennyi feladatot helyesen megoldotta, akkor tudásállapota [1,2,3,4,5] vagy röviden: [Q]. A tudásállapotok rendezett rendszerét *tudásszerkezet*nek (*knowledge structure*) nevezzük. A tudásszerkezet csak olyan tudásállapotokat tartalmazhat, amelyek mindegyike része egy hierarchikus hálónak, azaz összeköttetésben van legalább egy felette, és legalább egy alatta lévő tudásállapottal (kivéve a tudásszerkezet legalsó [0] és legfelső [Q] pontját). Ez azt jelenti, hogy a tudásszerkezet minden esetben jól tagolt (*well-graded*) kell, hogy legyen. A tudásszerkezetet levezethetjük a feladatok hierarchiájából (*szakértői tudásszerkezet* – 3. ábra), illetve meghatározhatunk egy, a tanulók válaszaiból származtatott, a tanulócsoportra jellemző tudásszerkezetet is (részletesebben lásd később).



3. ábra
Az 1. ábrán bemutatott Hasse-diagramból levezethető szakértői tudásszerkezet

Egy zavaró tényező: a tudás instabilitása

A tudásszerkezet és a tudásállapot meghatározásánál tekintettel kell lennünk azok *instabilitás*ára, a körülményektől függő változására is. Előfordulhat, hogy a tanuló elhibázza egy, a hierarchiában alacsonyabb szintén lévő feladatnak a megoldását, viszont meg tud oldani egy másik, a hierarchiában magasabb szinten lévő feladatot. Ez a tény – a tudástér-elmélet szerint – nem az alapfeltevés megkérdőjelezését jelenti, hanem a tudás bizonyos fokú instabilitásának következménye.

Milyen tényezők, milyen körülmények okozhatják ezt az instabilitást? Ismeretes, hogy ha egy tanuló nagyon sokáig nem foglalkozott egy adott tudásterülettel, akkor ezeknek az ismereteknek a felidézése nehézségekbe ütközik. Ez különösen nagy hatással lehet az első feladatok megoldásának eredményességére. Ilyenkor gyakran előfordul, hogy a feladatsorban előrehaladva egyre inkább felszínre kerülnek a megoldáshoz szükséges ismeretek, egyre könnyebbé válik azok felidézése, egyre eredményesebbé válik a feladatmegoldás. Az is előfordulhat, hogy a tanuló helyes választ ad egy kérdésre annak ellenére, hogy nincs tisztában a kérdés helyes megválaszolásához szükséges ismeretekkel. Ennek a *szerencsés találat*nak (*lucky-guess*) a valószínűsége különösen nagy lehet a zárt végű (feleletválasztásos) tesztek esetén. Ugyanakkor még nyílt végű feladatok (pl. numerikus problémák) hibás megoldása is adhat helyes végeredményt. Az instabilitás leggyakoribb megjelenési formája a *véletlen hiba* (*careless error*), amelynek rengeteg oka lehet (figyelmetlenség, fáradtság, időhiány, külső zavaró tényezők stb.).

Amint azt a későbbiekben látni fogjuk, a tudásszerkezet megállapítására szolgáló számítógépes programok a tudás instabilitásából adódó hibát bizonyos fokig tudják kezelni, amennyiben a kiindulási adatbázisban meg lehet adni mind a szerencsés találat, mind a véletlen hiba előfordulásának valószínűségét.

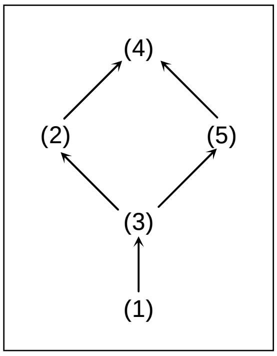
A szakértői hierarchia

A tudástér-elméletben és a tudásszerkezet vizsgálatában fontos szerepe van az úgynevezett *szakértői* (*expert*) *hierarchiá*nak, illetve a belőle levezethető *szakértői tudásszerkezetnek*. Egy több elemből álló tudástérben a szakértői hierarchia megállapításának többféle módszere lehetséges. Egyik lehetőség, hogy az elemeket (feladatokat) egyszerűen nehézségi sorrendbe állítjuk összetettségük vagy a tanulók által elért eredmények alapján. (Ez a típusú sorba rakás rendszerint lineáris hierarchiát eredményez.) Másik lehetőség, hogy az egyes feladatokat a megoldásukhoz szükséges tudás egymásra épülése szerint állítjuk sorba. Rendszerint ez is lineáris hierarchiát eredményez. A harmadik – a szakirodalomban leginkább elfogadott – eljárás lényege, hogy a feladatokra páronként megvizsgáljuk a következő állítás igaz vagy hamis voltát: *„Igaz-e, hogy ha a tanuló nem tudja megoldani a p feladatot, akkor biztosan nem tudja megoldani a p' feladatot sem?”* (*Falmagne* és mtsai, 1990). Amennyiben a válasz „igaz”, akkor a feladatok egymással való kapcsolatát feltüntető relációtáblázatba 1-t, amennyiben nem igaz, 0-t írunk. Egy ilyen *relációtáblázat*ot mutat az 1. táblázat.

1. táblázat. Egy öt feladatból álló tudástér lehetséges relációtáblázata

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	1	1	1	1	1
(2)	0	1	0	1	0
(3)	0	1	1	1	1
(4)	0	0	0	1	0
(5)	0	0	0	1	1
Σ	*1*	*3*	*2*	*5*	*3*

A relációtáblázat alapján a következőképpen szerkeszthetjük meg a feladatok hierarchiáját: Összeadjuk az egyes oszlopokban szereplő (pont)értékeket. Az 1-es pontértékű feladat (példánkban az (1) feladat) szerepel a hierarchia legalsó szintjén. Eggyel magasabb szintre kerül a 2-es pontértékű (3)-as feladat, még magasabbra a 3-as pontértékű (2)-es és (5)-ös feladat. A hierarchia csúcsán az 5-ös pontértékű (4)-es feladat lesz (5. ábra). Az egyes szintek közötti pontkülönbségnek is van információtartalma: azt mutatja meg, hogy az adott szinten lévő feladat hány másik alsóbb szinten lévő feladattal van közvetlen kapcsolatban. Így – esetünkben – látható, hogy a (3)-as feladat csak egyetlen alatta lévő feladattal (az (1)-es feladattal) van kapcsolatban. Ugyancsak egy alsóbb szinten lévő feladattal van kapcsolata a harmadik szinten lévő (2)-es és (5)-ös feladatoknak. A hierarchia legmagasabb szintjén helyet foglaló (4)-es feladat viszont két alatta lévővel, a (2)-es és az (5)-ös feladattal is kapcsolatban áll. Megjegyzem, hogy tapasztalatom szerint a relációtáblázat alapján történő hierarchia-meghatározáshoz jól használható a *Galois*-gráfok szerkesztésére kidolgozott *Pozsonyi András* és *Drommer Bálint* féle „Foxpro” és a *Szigeti Márton* által készített „Galois” számítógépes programcsalád (vö. *Takács*, 2000. 185–196. o.).



5. ábra
Az 1. táblázat adataiból származtatott szakértői hierarchia

A tudástér-elmélet néhány alkalmazása

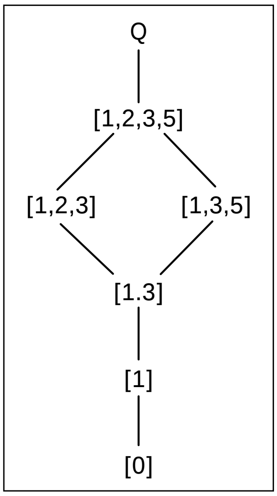
A tudástér-elmélet alkalmas az egyes tanulók tudásállapotának megállapítására (*individuális elemzésre*), valamint tanulócsoportok jellemző tudásszerkezetének meghatározására (*kollektív elemzésre*), a szakértői tudásszerkezettel való összevetésére, továbbá a jellemző tudásszerkezet változásának követésére és így például fogalmi fejlődés vizsgálatára is.

A tudásállapot meghatározása

Az egyes tanulók tudásállapotának meghatározása alapján két fontos kérdésre kaphatunk választ: (1) Mit tud már a tanuló az adott témakörből? (2) Milyen új tudás elsajátítására van már felkészülve eddigi tudása alapján? A kérdés az, hogyan lehet viszonylag egyszerűen és gyorsan meghatározni azt, hogy egy több száz elemből álló tudástérben elképzelhető több tízezer tudásállapot közül melyik rendelhető nagy valószínűséggel az adott tanulóhoz. Az eljárás lényegét egy egyszerű példán mutatom be.

Vegyünk egy öt elemből (feladatból) álló tudásteret, és tételezzük fel, hogy az elemek közötti hierarchikus kapcsolatot az 5. ábrán látható *Hasse*-diagram írja le. Az ebből a hierarchiából levezethető szakértői tudásszerkezet összesen hét tudásállapotot tartalmaz (6. ábra). Kérdés, hogy minimum hány feladat megoldásával lehet eldönteni ideális esetben – ha eltekintünk a tudás instabilitásától –, hogy a lehetséges tudásállapotok közül melyik jellemzi a tanulót. Könnyű belátni, hogy a tesztelést azzal a feladattal kell kezdeni, amely a lehetséges tudásállapotoknak körülbelül a felében fordul elő. Nagyon kockázatos lenne például az (1)-es feladattal kezdeni, hiszen ha ezt meg tudja oldani a tanuló – amire jó esélye van a tudásszerkezet alapján –, akkor csak egy tudásállapotot ([0]) zárhatunk ki, és még mindig marad hat lehetséges tudásállapot. (Ugyanilyen oknál fogva nem lenne célszerű a (4)-es feladattal indítani, hiszen nagy valószínűséggel azt nem tudja megoldani a tanuló, és így ismét csak egy tudásállapotot ([Q]) tudnánk kizárni.) A tesztelést tehát az (5)-ös feladattal célszerű kezdeni, ez ugyanis három tudásállapotban szerepel és négyben nem.

Tételezzük fel, hogy az *(A)* tanuló meg tudja oldani az (5)-ös feladatot. Ezzel az a négy tudásállapot ([0], [1], [1,3], [1,2,3]), amely nem tartalmazza az (5)-ös feladatot, kiesett. A maradék (három) tudásállapot számának szűkítésére most vagy a (2)-es, vagy a (4)-es feladatot célszerű megoldatni, erre a célra mindkét feladat egyformán jó. Tételezzük fel, hogy a (2)-es feladattal folytatjuk, és a tanuló azt is meg tudja oldani. Ezek után már csak két tudásállapot ([1,2,3,5], [Q]) maradt. A kettő között a (4)-es feladattal tudunk különbséget tenni. Tételezzük fel, hogy a tanuló nem boldogult a (4)-es feladattal, így ki kell ejtenünk a (4)-es feladatot is tartalmazó [Q] tudásállapotot. Így, három feladat megoldása után egyetlen egy tudásállapot maradt, az [1,2,3,5], tehát a tanuló jellemző tudásállapota ez lesz (2. táblázat).



6. ábra
Az 5. ábrán látható Hasse-diagramnak megfelelő tudásszerkezet

A 3. táblázat egy olyan esetet szemléltet, amikor a *(B)* tanuló nem tudta megoldani az elsőnek adott (5)-ös feladatot. Ilyenkor a (3)-as feladattal célszerű folytatni a tudásállapot meghatározását. Tételezzük fel, hogy a tanuló ezt meg tudta oldani. A maradék két tudásállapot között a (2)-es feladattal tudunk különbséget tenni. Minthogy ezt a tanuló helyesen oldotta meg, ezért tudásállapota: [1,2,3].

Ezekből az egyszerű példákból látható, hogy jelen esetben a tudásállapot megállapításához elegendő három alkalmasan megválasztott feladatot adni, nem szükséges mind az öt feladatot megoldatni. Ennek igazából akkor van jelentősége, ha nem öt, hanem több száz feladatból, és nem hét, hanem több tízezer tudásállapotból kell választanunk (*Falmagne* és mtsai, 1990). A példánkban szereplő két tanuló tudásállapotának valamint a szakértői tudásszerkezetnek (6. ábra) az ismeretében megállapíthatjuk, hogy az *(A)* tanuló rendelkezik minden olyan előismerettel, ami a (4)-es feladat megoldásához szükséges többletismeret elsajátításához kell, a *(B)* tanuló viszont csak az (5)-ös feladat megoldásához szükséges többletismeret megtanulására van felkészülve, a (4)-es feladatéra még nem.

Példánkban egy olyan idealizált esetet vizsgáltunk, ahol eltekintettünk a tudás instabilitásából adódó bizonytalanságtól, azaz úgy vettük, hogy ha a tanuló egyszer nem tudott megoldani egy adott feladatot, akkor azt később sem tudja megoldani, illetve az egyszer sikeresen megoldott feladatok megoldását a későbbiekben sem fogja soha elhibázni. A valóságos esetekre kifejlesztett eljárások figyelembe veszik az instabilitásból adódó bizonytalanságot is. Ez abban jelenik meg, hogy az egyes feladatok megoldásának értékelése után nem „esnek ki" bizonyos tudásállapotok, csak a valószínűségük csökken, a „maradt" tudásállapotok valószínűsége pedig nő. Ezen az elven működik az egyik legismertebb interaktív tesztelő és tanító program, az ALEKS (*www.aleks.com*).

2. táblázat. Az (A) tanuló tudásállapotának meghatározása

A feladat		*Tudásállapot*						
száma	*megol-dása*	*[0]*	*[1]*	*[1,3]*	*[1,2,3]*	*[1,3,5]*	*[1,2,3,5]*	*[Q]*
(5)	jó	kiesett	kiesett	kiesett	kiesett	maradt	maradt	maradt
(2)	jó					kiesett	maradt	maradt
(4)	rossz						**maradt**	kiesett

3. táblázat. A (B) tanuló tudásállapotának meghatározása

A feladat		*Tudásállapot*						
száma	*megol-dása*	*[0]*	*[1]*	*[1,3]*	*[1,2,3]*	*[1,3,5]*	*[1,2,3,5]*	*[Q]*
(5)	rossz	maradt	maradt	maradt	maradt	kiesett	kiesett	kiesett
(3)	jó	kiesett	kiesett	maradt	maradt			
(2)	jó			kiesett	**maradt**			

Az ALEKS programcsomag

Az ALEKS (*Assessment and LEarning in Knowledge Spaces*, [Értékelés és tanulás a tudástérben]) internetes programot *Falmagne és munkatársai* hozták létre a University of California at Irvine-en. Ez az értékelő és oktató program az általános és középiskolai matematika (K–12 Mathematics) egyes fejezeteit (aritmetika, geometria, algebra, trigonometria, statisztika), valamint a felnőttek számára szóló alkalmazott matematika (*Adult and Continuing Professional Education*) néhány területét (üzleti matematika, statisztika a viselkedéstudományban) dolgozza fel (ALEKS Corporation, 2006).

A program főbb részei: A program először megtanítja a válaszadás mikéntjét, törtek, képletek, grafikonok szerkesztését (*Interactive Tutorial*, *Answer Editor*). Ezt követően a kiválasztott témakörben és szinten 15–25 feladatot kell a tanulónak megoldania (*Assessment*). A tanuló válaszai alapján a program egy részletes értékelést készít (*Report*), amelyben – többek között – grafikonokon szemlélteti az elért eredményeket (*MyPie*), és megfogalmazza, hogy tudásállapota alapján milyen új ismeretek befogadására van a tanuló felkészülve *(Ready to Learn*). A tanuló ez alapján interaktív módon el is kezdheti a további ismeretek tanulását (*Learning Mode*). Ez az oktatóprogram tartalmaz – többek között – definíciógyűjteményt (*Dictionary with definitions*), gyakorló feladatokat a megoldás részletes magyarázatával, illetve a tanuló válaszának értékelésével (*Problems with explanation and answer/error-analysis*). Található még a programban egy, a tanuló eddigi eredményeit dokumentáló rész (*Student's History*), amelybe a szülő is betekinthet (*Parent Modul*).

Ez a program – az előző részben leírtak alapján – alkalmasan megválasztott 15–25 feladattal meghatározza a tanuló tudásállapotát egy olyan tudástérben, amely több száz elemből épül fel. Amint már azt korábban jeleztem, a tanuló egy-egy feladatra adott helyes vagy hibás válaszától függően egyes tudásállapotok valószínűsége csökken, másoké nő. A program minden feladat után kiszámolja a tudásállapotok valószínűsége alapján a tudásszerkezet jellemző entrópiáját (lényegében a tudásállapotok valószínűségszorzatának logaritmusát), és addig folytatja az újabb és újabb feladatok generálását, amíg ez az entrópia egy kritikus érték alá nem csökken. Ez akkor következik be, ha a tudásszerkezetet felépítő több tízezer tudásállapot közül néhánynak a valószínűsége kiugró mértékben megnő. Ezek közül a legvalószínűbb tudásállapot lesz a tanuló jellemző tudásállapota (*Falmagne* és mtsai. é. n.).

A tudásszerkezet meghatározása

Egy-egy tanulócsoport jellemző tudásszerkezetének meghatározása számos vizsgálatra ad lehetőséget. Tanulmányozhatjuk különböző tényezők (pl. életkor, nem, iskolatípus, tanítási módszer) hatását a tudásszerkezet megváltozására, a tudás szerveződésére. A tanulócsoport jellemző tudásszerkezetének a szakértői tudásszerkezettől való eltérése alapján fontos információkat kaphatunk az ismeretanyag tanításának optimális sorrendjére. Ezekben az elemzésekben nagy segítséget jelent a tudásszerkezet alapján megszerkeszthető úgynevezett *optimális tanulási út* (*critical learning pathway*) és a feladatok hierarchiáját kifejező Hasse-diagram is. A tanulócsoport jellemző tudásszerkezetének meghatározását és további elemzését egy saját vizsgálaton keresztül mutatom be (*Tóth*, 2006).

A vizsgálat célja, módszere és körülményei

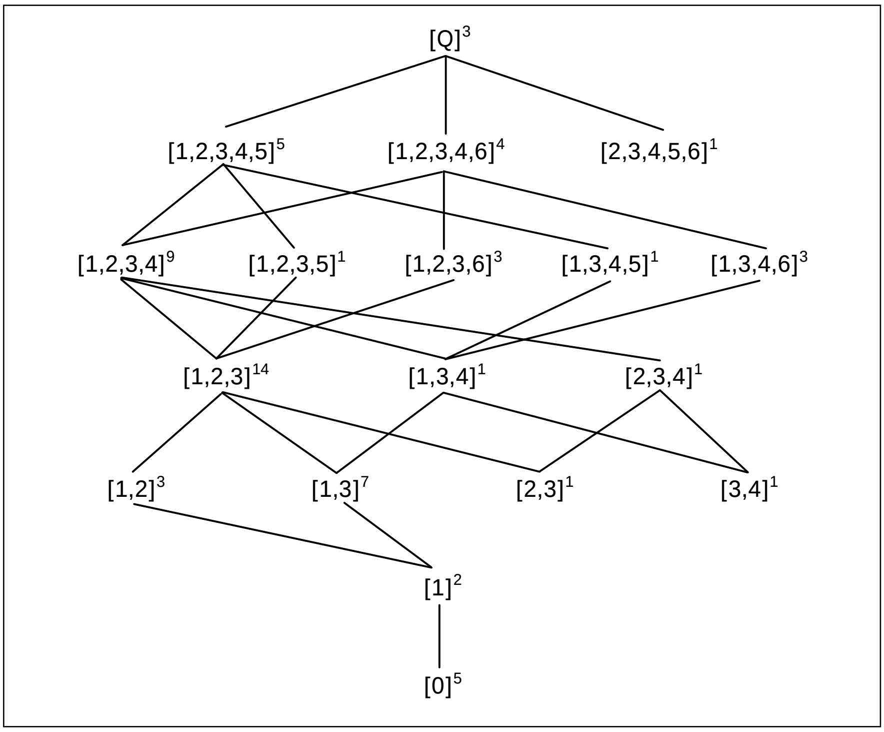
Egy rövid írásbeli teszt segítségével vizsgáltuk 9–10. osztályos gimnáziumi tanulók tudásszerkezetét alapvető fizikai és kémiai mennyiségek (sűrűség, tömegszázalék, moláris tömeg és moláris térfogat) számítása, valamint összetett feladatok (sűrűség számítása moláris mennyiségekből; térfogat számítása megadott megoldási váz alapján tömegszázalék, moláris tömeg és moláris térfogat felhasználásával) megoldásában való alkalmazása terén. Az *1. feladatban* tömegből és térfogatból kellett sűrűséget, illetve tömegből és sűrűségből kellett térfogatot számolni. A *2. feladatban* egy oldat tömegének és tömegszázalékos összetételének ismeretében kellett kiszámolni az oldott anyag tömegét, illetve az oldott anyag tömegéből és a tömegszázalékos összetételből ki kellet számolni az oldat tömegét. A *3. feladat* megoldása során tömegből és moláris tömegből anyagmennyiséget, illetve anyagmennyiségből és moláris tömegből tömeget kellett számolni. A *4. feladatban* anyagmennyiséget kellett számolni térfogatból és moláris térfogatból. Az *5. feladatban* rá kellett jönni, hogy a megadott adatokból (moláris tömegből és moláris térfogatból) sűrűséget lehet számolni, és azt ki is kellett számolni. A *6. feladat* során egy háromlépéses megoldási séma üres négyszögeit kellett kitölteni, ezekhez tudni kellett kiszámolni az oldott anyag tömegét az oldat tömegéből és tömegszázalékos összetételéből, majd rá kellett jönni, hogy a sémában megadott anyagmennyiség az előző számításban kapott tömegből a moláris tömeg segítségével számolható, végül az anyagmennyiségből a moláris térfogat segítségével kellett kiszámolni egy kérdéses térfogatot. Ezen vizsgálat részeként most egy nagyvárosi gimnázium 65 tanulójának eredményét, és az eredmények KST-elemzését mutatom be.

A tanulócsoport válaszszerkezete

A felmérés eredményeként – az egyes feladatok megoldását *dichotóm skálán* értékelve – kapunk egy *bináris adatbázist* (4. táblázat), amely alapján – ha szükséges – megszerkeszthetjük az ún. *válaszszerkezetet* is. A 7. ábrán látható válaszszerkezetben az egyes tudásállapotok felső indexében az adott tudásállapothoz tartozó tanulók száma olvasható. (Az $[1,2,3,4]^9$ tehát azt jelenti, hogy a tanulócsoportban 9 olyan tanuló volt, aki csak az (1)-es, a (2)-es, a (3)-as és a (4)-es feladatot tudta megoldani. Öt tanuló nem tudott megoldani egyetlen egy feladatot sem, $[0]^5$, ugyanakkor három tanuló mind a hat feladatot helyesen oldotta meg, $[Q]^3$.) A válaszszerkezetből az is megállapítható, hogy a lehetséges $2^6 = 64$ tudásállapotból csak 18 fordul elő a tanulócsoportban. Ugyanakkor az is látszik, hogy ez a szerkezet nem tesz eleget a tudásszerkezettel kapcsolatos követelményeknek, hiszen tartalmaz olyan tudásállapotokat is, amelynek nincs kapcsolata valamelyik alatta lévővel ([2,3], [3,4] és [2,3,4,5,6]).

4. táblázat. A felmérés eredményeként kapott bináris adatbázis

1. feladat	*2. feladat*	*3. feladat*	*4. feladat*	*5. feladat*	*6. feladat*	*A tanulók száma*
0	0	0	0	0	0	5
1	0	0	0	0	0	2
1	1	0	0	0	0	3
1	0	1	0	0	0	7
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	14
1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	9
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	3
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	3
1	1	1	1	1	0	5
1	1	1	1	0	1	4
0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	3



7. ábra
A vizsgált nagyvárosi tanulócsoport válaszszerkezete

A tanulócsoport jellemző tudásszerkezetének meghatározása

A tanulócsoport jellemző tudásszerkezetének meghatározása tulajdonképpen azt jelenti, hogy keressük azt a tudásszerkezetet, amellyel a lehető legjobban tudjuk leírni az eredeti válaszszerkezetet, figyelembe véve a szerencsés találat és a véletlen hiba valószínűségét is. Ez a keresés jelenleg még egy szisztematikus próbálgatást jelent: a legnépszerűbb tudásállapotokból kiindulva addig cserélgetjük, bővítjük a tudásszerkezetet, amíg a χ^2-próba alapján a legjobb illeszkedést nem kapjuk. A tudásszerkezet jóságára jellemző χ^2-et, valamint az egyes tudásállapotokhoz tartozó jósolt populációt egy BASIC program, az úgynevezett *Potter-féle program* segítségével tudjuk számolni (*Potter*, 2004).

A program bemenő adatai a következők: a tanulók válaszaiból szerkesztett bináris adatfájl („RESP.TXT”, 8. ábra), valamint a vizsgált tudásszerkezetbe felvett tudásállapotokat és az egyes feladatokra vonatkozó szerencsés találat és véletlen hiba valószínűségeket is tartalmazó adatfájl („KNOW.TXT”, 9. ábra). (Amennyiben ezek a valószínűségek nehezen becsülhetők meg, akkor – az irodalomban szokásos módnak megfelelően – értéküknek 0,1-et, azaz 10%-ot szoktak adni.)

```
0  0  0  0  0  0  5
1  0  0  0  0  0  2
1  1  0  0  0  0  3
1  0  1  0  0  0  7
0  1  1  0  0  0  1
0  0  1  1  0  0  1
1  1  1  0  0  0 14
1  0  1  1  0  0  1
0  1  1  1  0  0  1
1  1  1  1  0  0  9
1  1  1  0  1  0  1
1  1  1  0  0  1  3
1  0  1  1  1  0  1
1  0  1  1  0  1  3
1  1  1  1  1  0  5
1  1  1  1  0  1  4
0  1  1  1  1  1  1
1  1  1  1  1  1  3
```

8. ábra
Az első bemeneti fájl (RESP.TXT) a Potter-féle illesztő programhoz

```
0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 -1
0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 -1
0 0 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0
1 1 0 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0
1 1 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 0 1 0 0
1 1 1 0 0 1 0
1 1 1 1 1 0 0
1 1 1 1 0 1 0
1 1 1 1 1 1 0
```

9. ábra
A második bemeneti fájl (KNOW.TXT) a Potter-féle illesztő programhoz

A 10. ábra a számítás eredményeként kapott kimeneti fájl egy részletét mutatja. Ebből látható, hogy a vizsgált minta válaszszerkezete 18 tudásállapotot tartalmaz („n”), a modellként próbált tudásszerkezetben 17 tudásállapot van („m”), és a vizsgált tanulócsoport létszáma 65 („Population”). Az ezután következő táblázat első oszlopa a modellbe felvett tudásállapotok kettes számrendszerbeli kódját, második oszlopa pedig a bináris kódját tartalmazza („Knol. st.”). A harmadik oszlopban („Prob”) láthatjuk az egyes tudásállapotok valószínűségét, a negyedikben pedig („Pred Pop”) a modell alapján az egyes tudásállapotokhoz rendelhető jósolt tanulószámot. Az ötödik oszlop („Pop”) mutatja a tényleges tanulószámot, a hatodik oszlop pedig a számított és a tényleges létszám alapján számolt χ^2-et („Chi Sq”). Az utolsó sor tartalmazza az illesztés jóságára jellemző összesített χ^2-et, zárójelben feltüntetve a tudásállapotok számát („ChisqT”).

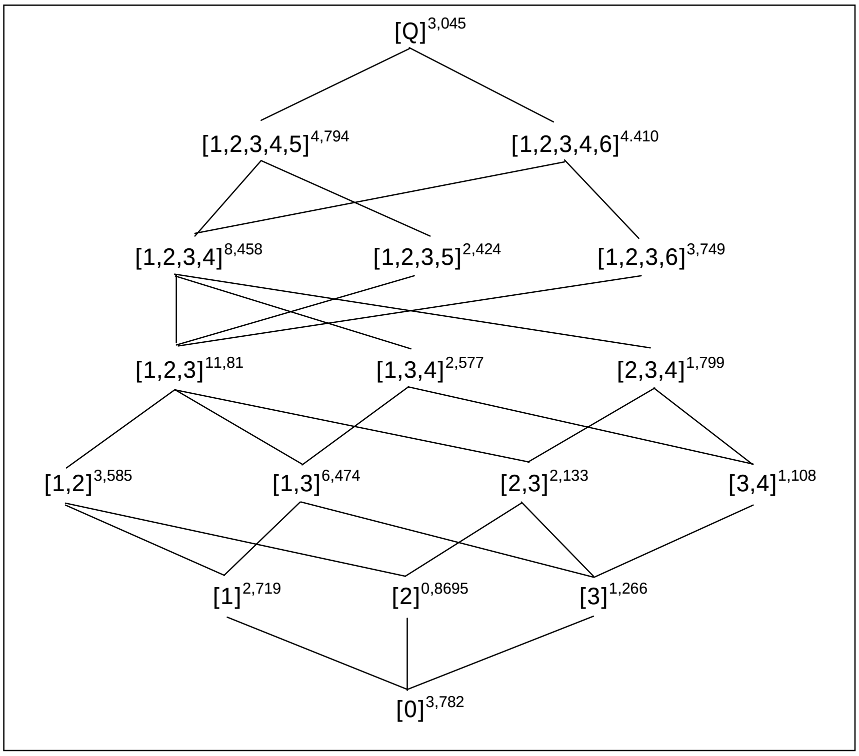
n=18   m=17   Population =65

Knol.st.		Prob	Pred Pop	Pop	Chi Sq
0	000000	0.05818	3.78155	5	0.39259
32	100000	0.04183	2.71923	2	0.19024
16	010000	0.01338	0.86948	0	0.86948
8	001000	0.01948	1.26642	0	1.26642
48	110000	0.05516	3.58530	3	0.09555
40	101000	0.09960	6.47404	7	0.04273
24	011000	0.03282	2.13333	1	0.60208
12	001100	0.01704	1.10774	1	0.01048
56	111000	0.18165	11.80719	14	0.40724
44	101100	0.03964	2.57690	1	0.96496
28	011100	0.02768	1.79916	1	0.35497
60	111100	0.13012	8.45779	9	0.03476
58	111010	0.03729	2.42391	1	0.83647
57	111001	0.05767	3.74863	3	0.14951
62	111110	0.07376	4.79426	5	0.00883
61	111101	0.06784	4.40966	4	0.03806
63	111111	0.04685	3.04539	3	0.00068

ChisqT(17)= 6.265

10. ábra
A számítás eredményét tartalmazó fájl részlete

Az illeszkedés jóságának megállapításához szükségünk van még a szabadságfok ismeretére is. Ezt a következőképpen számolhatjuk ki: a modellbe felvett tudásállapotok számának (17) és a szerencsés találat, valamint a véletlen hiba változtatható valószínűsége számának (2•6=12) összegét eggyel csökkentjük (SzF = 17 + 6 + 6 – 1 = 28). Az így kapott 28-as szabadsági foknál a 6,265-es χ^2-érték $p < 0,005$, azaz a modell nagyon jól leírja a kiindulási állapotot. Mivel a vizsgált modellek közül ebben az esetben kaptuk a legjobb illeszkedést, ezért ezt fogadhatjuk el, mint a tanulócsoport jellemző tudásszerkezetét. Ennek gráfszerű megjelenítését mutatja a 11. ábra.



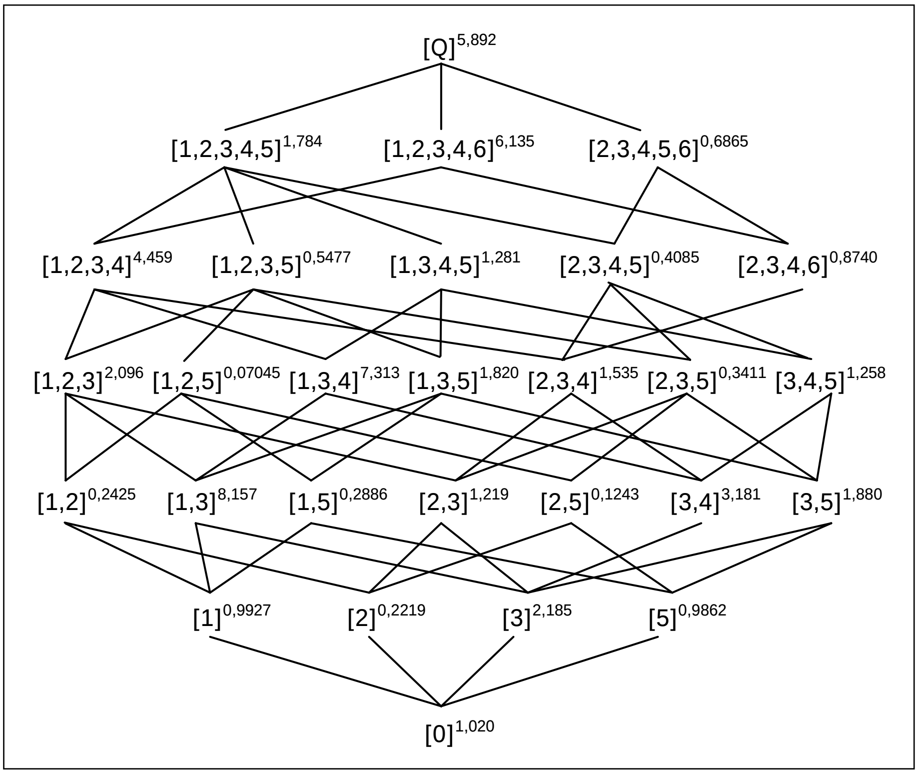
11. ábra
A vizsgált nagyvárosi tanulócsoport jellemző tudásszerkezete

Az előbbiekben bemutatott feladatlapot megírattuk egy kisvárosi gimnáziumban is. Az összesen 57 tanulót tartalmazó csoport válaszszerkezete 21 tudásállapotot tartalmazott. Az illesztés eredményeként kapott jellemző tudásszerkezet ennél több, összesen 28 tudásállapotból áll (12. ábra). (Az illesztés jóságára jellemző paraméterek: χ^2=13,34; SzF=39; p<0,005.)

A két különböző gimnáziumot képviselő tanulócsoportok jellemző tudásszerkezetét összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy

1) mindkét tanulócsoport jellemző tudásszerkezete meglehetősen szerteágazó, és a kisvárosi gimnázium tanulóinak tudásszerkezete sokkal diffúzabb, mint a nagyvárosié;
2) a kisvárosi gimnázium tanulóira leginkább jellemző az [1,3] és az [1,3,4] tudásállapot, a nagyvárosi gimnázium tanulóira viszont az [1,2,3] és az [1,2,3,4] tudásállapotok a legjellemzőbbek.

A tudásszerkezet ismeretében meghatározhatjuk, és a különböző tanulócsoportok esetén összehasonlíthatjuk az ismeretek egymásra épülésének legjellemzőbb útját, az ún. *jellemző tanulási utat* (*critical learning pathway*) is.



12. ábra
Egy kisvárosi tanulócsoport jellemző tudásszerkezete

A tanulócsoportra jellemző tanulási út meghatározása

A tudásszerkezetben a [0] tudásállapotból a [Q] tudásállapotba általában többféle úton juthatunk el. Egy hat elemből álló tudástérben az elméletileg lehetséges utak száma 6!=640. Hogyan, milyen módszerek segítségével dönthetjük el azt, hogy a lehetséges utak közül melyik az, amelyik a leginkább jellemző az adott tanulócsoportra? Ennek a jellemző tanulási útnak a kiválasztásához négyféle eljárást is használhatunk.

A szakirodalomban legelterjedtebben használt módszer szerint a tanulócsoportra jellemző tudásszerkezetben megkeressük azt az utat, amelyen haladva a tudásállapotok valószínűségének (vagy ami ezzel egyenértékű, a jósolt populációknak) a szorzata a legnagyobbnak adódik (*Taagepera* és *Noori*, 2000; *Taagepera* és mtsai, 2002*; Arasasingham* és mtsai, 2004; *Arasasingham* és mtsai, 2005). Ez az eljárás a nagyvárosi minta esetén az *(1)→(3)→(2)→(4)→(5)→(6)* és *(1)→(3)→(2)→(4)→(6)→(5)*, a kisvárosi tanulócsoportra a *(3)→(1)→(4)→(2)→(6)→(5)* jellemző tanulási utat eredményezi. Ennek az eljárásnak kétségtelenül nagy nehézsége, hogy alkalmazásához először meg kell találni a tanulócsoport jellemző tudásszerkezetét, amely – mint láttuk – egy próbálgatás eredménye, és mint ilyen, meglehetősen nehézkes és bizonytalan.

Sokkal egyszerűbb és egyértelműbb az az általunk kifejlesztett eljárás (*Tóth* és *Kiss*, 2006), amelynek lényege, hogy a kiindulási válaszszerkezet alapján a Potter-féle program segítségével megalkotjuk az ún. *empirikus tudásszerkezetet*. Az empirikus tudásszerkezet tartalmazza az adott tudástérben lehetséges összes tudásállapotot, esetünkben $2^6 = 64$ tudásállapotot. Ennek megalkotásához mindössze annyi kell, hogy az illesztés során a második bemeneti fájlban („KNOW.TXT") a szerencsés találat és a véletlen hiba valószínűségén (a fájl első két sora) kívül megadjuk mind a 64 tudásállapot bináris kódját.

Az empirikus tudásszerkezet alapján a lehetséges 640 tanulási út közül a tanulócsoportra jellemző tanulási utat kétféle módon is meghatározhatjuk: *(a)* az egyes utakban foglalt tudásállapotok valószínűségének szorzata alapján, illetve *(b)* az egyes utaknak az eredeti válaszszerkezetet leíró jósága alapján, azaz megkeressük azt az utat, amelyik a legkisebb χ^2-értékkel írja le a válaszszerkezetet. Esetünkben az *(a)* eljárás két jellemző tanulási utat [*(1) → (3) → (2) → (4) → (5) → (6)* és *(1) → (3) → (2) → (4) → (6) → (5)*] adott a nagyvárosi mintára, és egyet [*(3) → (1) → (4) → (2) → (6) → (5)*] a kisvárosi populációra. A *(b)* eljárással egy jellemző tanulási utat [*(1) → (3) → (2) → (4) → (5) → (6)*] kaptunk a nagyvárosi tanulócsoportra, és kettőt a kisvárosira [*(3) → (1) → (4) → (2) → (6) → (5)* és *(1) → (3) → (4) → (2) → (6) → (5)*].

A jellemző tanulási út kiválasztásának nehézségei és bizonytalanságai motiválták a University of California at Irvine munkatársait egy olyan számítógépes program elkészítésére, amely néhány perc alatt teszteli a tanulási utakat, és megadja a legjobb négy tanulási utat. *Gaelan Lloyd* hDA (*Hexagon Data Analysis*) nevű szoftware-je pillanatnyilag még fejlesztés alatt van, eddig elkészült változata kutatási célokra ingyenesen használható (*Lloyd*, é. n.). A hDA program szerint a nagyvárosi mintára egy tanulási út jellemző: *(1)→ (3)→ (2)→ (4)→ (5)→ (6).* Eszerint a program szerint a kisvárosi gimnazisták jellemző tanulási útjára két tanulási út adható meg: *(1)→ (3)→ (4)→ (2)→ (6)→ (5)* és *(3)→ (1)→ (4)→ (2)→ (6)→ (5).*

A tanulócsoport jellemző tanulási útjának meghatározására tehát négy féle módszert is használhatunk. Ennek ellenére azonban két olyan kérdés merül fel a meghatározás során, amelynek megnyugtató megválaszolása még várat magára.

1) Mindegyik módszer valamilyen számszerű adattal (valószínűségi szorzattal, illeszkedési paraméterrel, populációszázalékkal) jellemzi az egyes tanulási utakat. Kérdés, hogy mikor, milyen értékkülönbségek esetén tekinthetünk két tanulási utat egyenrangúnak, illetve egymástól különbözőnek. Mi a saját gyakorlatunkban akkor tekintettünk két tanulási utat egyenértékűnek, ha a jellemző számszerű adataik között a különbség nem haladta meg a 10%-ot.
2) Mind a négy módszernek van előnye és hátránya; valójában még senki sem tudja, hogy közülük melyik a legpontosabb. Ezért mi azt a gyakorlatot követtük, hogy mind a négy módszerrel meghatároztuk a jellemző tanulási utat, és azt fogadtuk el a tanulócsoportra jellemző útnak, amely legalább három módszer alapján adódott.

Az ilyen elvek szerint kapott jellemző tanulási utakat a *13. ábra* szemlélteti. Látható, hogy szembetűnő különbség van a két populáció között. Ugyanakkor a komplex (5-ös és 6-os) feladatok megoldása az egyszerűbb feladatok megoldására épül mindkét tanulócsoport esetén.

nagyvárosi csoport

(1) → (3) → (2) → (4) → (5) → (6)

kisvárosi csoport

(3) → (1) → (4) → (2) → (6) → (5)

13. ábra
A vizsgált tanulók jellemző tanulási útjai

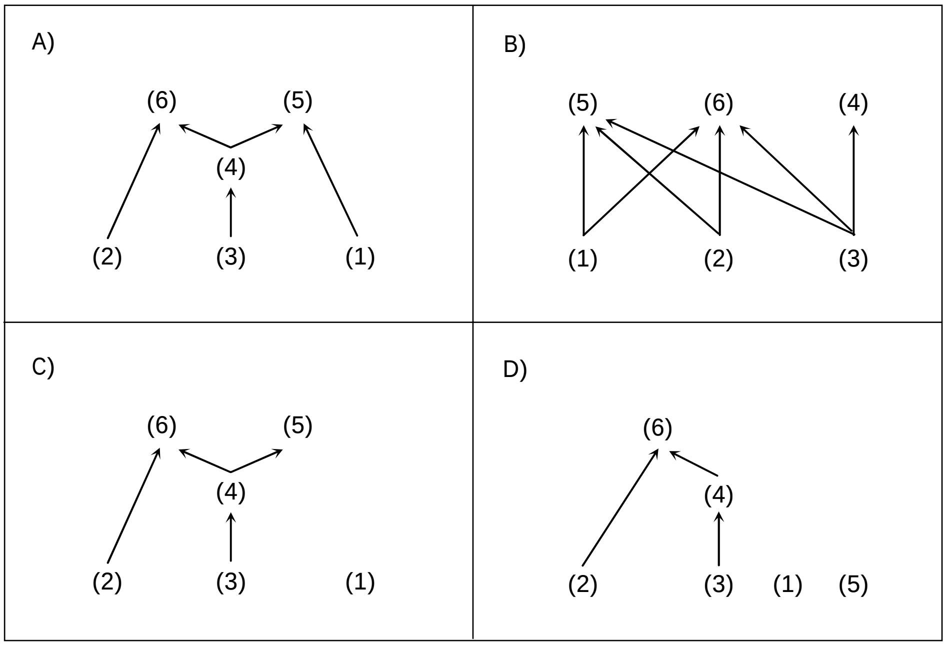
A tudástér-elméletnek a kémia-didaktikai kutatásokban való alkalmazása eddig lényegében abban merült ki, hogy a tanulócsoportok tudásszerkezete alapján meghatározták a legjellemzőbb tanulási utat, és ezt hasonlították össze különböző csoportok esetén, illetve vizsgálták eltérésüket a szakértők által összeállított tanulási úttól (*Taagepera* és *Noori*, 2000; *Taagepera* és mtsai, 2002*; Arasasingham* és mtsai, 2004; *Arasasingham* és mtsai, 2005). Bár ezek az eredmények is nagyon hasznosak lehetnek a tudáselemek egymásra épülését és főleg az ismeretek hatékony tanításának sorrendjét illetően, komoly hiányossága a módszernek, hogy a tudás szerveződését lényegében egy lineáris modellel próbálja leírni és értelmezni. Véleményünk szerint sokkal informatívabbak azok a modellek, amelyek a feladatok (illetve a megoldásukhoz szükséges tudáselemek) hierarchiáját próbálják leírni a tanulócsoport válaszszerkezete alapján.

A tudás szerveződése: a tanulócsoportra jellemző feladathierarchia meghatározása

A tanulócsoportra jellemző feladathierarchiából (Hasse-diagramból) kiderül, hogy a tanulócsoportra milyen tudásszerveződés a leginkább jellemző, milyen tudáselemek épülnek egymásra, illetve képeznek többé-kevésbé izolált szigeteket a tanulók kognitív struktúrájában.

A feladathierarchia meghatározása azt jelenti, hogy keressük azt a hierarchikus modellt, amellyel a lehető legjobban leírhatjuk a kiindulási válaszszerkezetet, figyelembe véve a szerencsés találat és a véletlen hiba valószínűségét is. Ennek a modellnek a megtalálása – számítógépes program híján – ma még csak próbálgatásos eljárást jelent. A próbálgatás kiinduló pontja a tanulócsoportra jellemző tudásszerkezet. Amennyiben sikerül olyan feladathierarchiát találni, amely maradék nélkül leírja a tanulók jellemző tudásszerkezetét, akkor megtaláltuk a legjobb hierarchikus modellt is.

A példaként bemutatott vizsgálatban azt találtuk, hogy a nagyvárosi gimnázium 9–10. osztályos tanulóinak válaszszerkezetét a 14. ábrán látható négy (*A, B, C, D*) modell egyformán jól ($p<0,005$) írja le, ugyanakkor a kisvárosi tanulócsoportra a *D* modell bizonyult a legjobbnak.



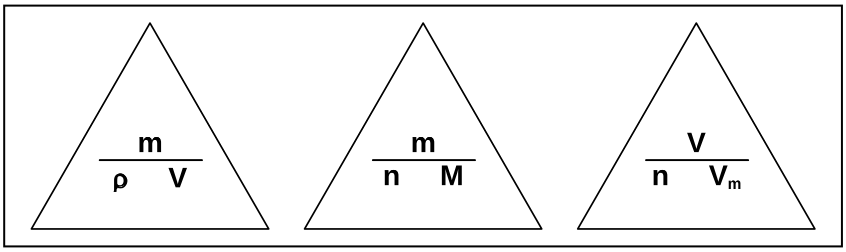
14. ábra
A nagyvárosi (A-D) és a kisvárosi (D) tanulócsoportra jellemző feladathierarchia

A jellemző feladathierarchiák ismeretében a következő megállapításokat tehetjük a tudás szerveződéséről a két tanulócsoport esetén:

1) Megállapítható, hogy – a *B* modell kivételével – valamennyi modell esetén, a szakértői várakozásnak megfelelően, a (6)-os feladat megoldásához szükséges tudás csak a (2)-es, a (3)-as és a (4)-es feladat megoldásához szükséges tudásra épül. Ez nem meglepő, hiszen a feladatlapon megadtuk a (6)-os feladat megoldásának vázát, a tanulóknak mindössze annyi dolguk volt, hogy felismerjék az egyes elemeket, és beírják a hiányzó mennyiségeket. Ilyen módon tehát az ismereteknek ez a szoros kapcsolata megtévesztő, a feladat megfogalmazása által manipulált, így nem valószínű, hogy híven tükrözi a valódi tudásszerveződést.
2) Figyelemre méltó viszont, hogy valamennyi esetben a (4)-es feladat megoldásához szükséges ismeret (a moláris térfogat kapcsolata a térfogattal és az anyagmennyiséggel) a (3)-as feladat megoldásához szükséges ismeretre (a moláris tömeg kapcsolata a tömeggel és az anyagmennyiséggel) épül. Ez első látásra meglepő, hiszen a két fogalom (moláris tömeg, moláris térfogat) egymástól független. A tanulók kognitív struk-

túrájában azonban egyértelmű a két fogalom egymásra épülése. Ennek magyarázata az lehet, hogy *(a)* a moláris tömeg az első moláris mennyiség, amellyel a tanulók tanulmányaik során találkoznak, illetve *(b)* a moláris mennyiségek közül a moláris tömeget használják a leggyakrabban kémiai tanulmányaik során. Így tehát a moláris tömeg a fogalmi rendszerük jól beágyazott része, és a később tanult másik moláris mennyiség, a moláris térfogat fogalma erre épülve, ezzel kapcsolódva rögzül a tanulók kognitív struktúrájában.

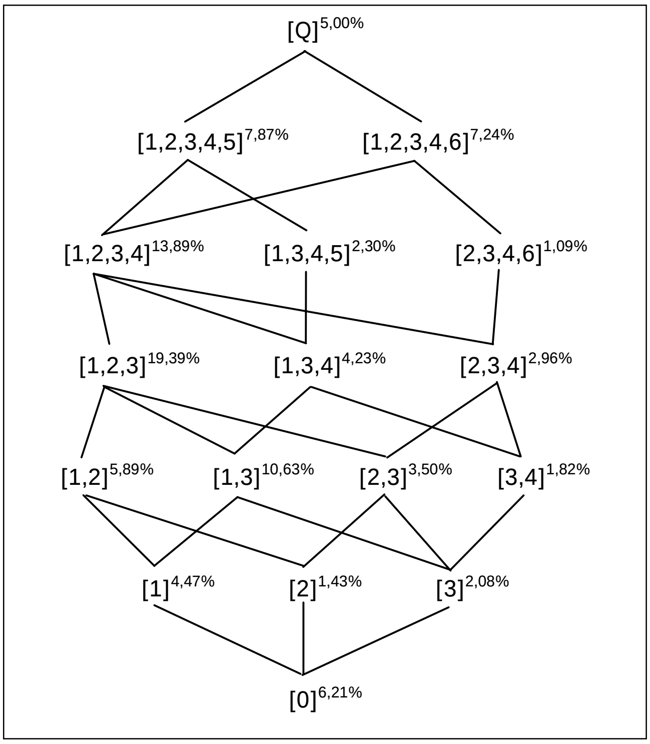
3) Noha az *A* modellben megjelenik az a szakértői várakozás, hogy az (5)-ös feladat megoldásához szükséges ismeret az (1)-es, (3)-as és (4)-es feladatokéra épül, ez a hierarchia közel sem olyan stabilis, mint az előbbi esetben, a (2), (3), (4), (6) feladatok esetén tapasztaltuk. A *C* modell szerint a nagyvárosi tanulócsoport tudásszerveződésében kimutatható az is, hogy az (5)-ös feladat megoldásához szükséges ismeret (vagyis annak felismerése, hogy a sűrűséget nemcsak tömegből és térfogatból, hanem moláris tömegből és moláris térfogatból is lehet számítani) csak a két moláris mennyiség (moláris tömeg és moláris térfogat) ismeretére épül, de nincs kapcsolatban magának a sűrűségnek a fogalmával. A mindkét tanulócsoportra jellemző *D* modell szerint az (5)-ös feladat megoldásához szükséges ismeret izolálódhat is, sem az (1)-es feladattal (sűrűség fogalma), sem a (3)-as (moláris tömeg fogalma) és a (4)-es (moláris térfogat fogalma) feladattal nincs kapcsolatban. Ennek az lehet a magyarázata, hogy a moláris mennyiségekből való sűrűségszámítást általában nem tanítják, ennek a problémának a megoldásához a tanulónak kell mozgósítania a sűrűséggel, a moláris tömeggel és a moláris térfogattal kapcsolatos ismereteit. Ennek a kapcsolatnak a felismerése azonban nem könnyű.
4) Megválaszolásra váró kérdés még az, hogy miként lehet értelmezni a két tanulócsoport esetén a tudás szerveződésében kimutatható markáns különbséget, nevezetesen azt, hogy míg a nagyvárosi gimnázium tanulóira jellemző tudásszerveződés meglehetősen heterogén képet mutat (négy modellel is leírható), addig a kisvárosi gimnázium tanulóinak tudásszerveződése meglehetősen egységes (egyetlen egy modellel leírható). Ennek oka valószínűleg abban keresendő, hogy a nagyvárosi gimnázium diákjai sokféle általános iskolából verbuválódnak, míg a kisvárosi gimnázium 9–10. osztályos tanulói ebből a szempontból viszonylag homogén csoportot alkotnak.
5) További izgalmas kérdés annak elemzése, hogy a viszonylag homogén kisvárosi tanulócsoport tudásszerkezetét miért pont a *D* modellel lehet a legjobban leírni. Azzal a modellel, amelyben az (5)-ös feladat megoldásához szükséges ismeret – a szakértői várakozással ellentétben – teljes mértékben izolálódik az (1)-es, a (3)-as és a (4)-es feladatok ismeretanyagától. Erre a kérdésre a választ a tanulói megoldások módszertani elemzése adta meg. Kiderült, hogy ennek az iskolának a tanulói jelentős számban alkalmazták a 15. ábrán látható memorizálási technikát az alapvető fizikai és kémiai mennyiségek (sűrűség, tömegszázalék, moláris tömeg, moláris térfogat) számításában és – feltehetően – tanulásában. Ez a magyarázata annak, hogy ennek az iskolának a tanulói – a *D* modellnek megfelelően – nem tudták mozgósítani a nem értelmes tanulással, hanem magolással rögzült ismereteiket egy új, addig még nem ismert probléma megoldásakor.



15. ábra
A kisvárosi iskola tanulói által használt memorizálási technika a sűrűség (ρ) – tömeg(m) – térfogat(V), az anyagmennyiség(n) – tömeg(m) – moláris tömeg(M) és az anyagmennyiség(n) – térfogat(V) – moláris térfogat(V_m) kapcsolatának rögzítésére.

A hatékony tanítás következő lépése: a kritikus feladat megállapítása

Amennyiben elfogadjuk, hogy a tudástérben lévő ismeretek logikus egymásra épülése a szakértői tudásszerkezetnek felel meg, akkor lehetőségünk van a tanítási folyamat optimalizálására is, amennyiben minden tanulócsoport esetén meg tudjuk mondani, hogy melyik ismeret elsajátítására van felkészülve a tanulók többsége, azaz melyik ismeret (fogalom, probléma) tárgyalásával célszerű folytatni a tanulócsoport tudásának fejlesztését. Esetünkben a feladatok szakértői hierarchiáját a 14. ábrán látható *A* modellel lehet leírni. Ebből a Hasse-diagramból levezethető a szakértő tudásszerkezet (16. ábra). Ezt a tudásszerkezetet beírva a Potter-féle programba (KNOW.TXT bemeneti fájl) megkapjuk, hogy a tanulócsoport hány százaléka rendelhető az egyes tudásállapotokhoz (16. ábra). Ez alapján pedig kiszámolhatjuk, hogy a tanulók hány százaléka van felkészülve az egyes feladatok megoldásához szükséges új tudás elsajátítására. Nézzük meg például, hogy a nagyvárosi tanulócsoport tanulóinak hány százaléka rendelkezik azokkal az előismeretekkel, amelyek a (6) feladat megoldásához szükséges új ismeret megszerzéséhez kell. A 16. ábrán látható tudásszerkezetből leolvasható, hogy erre csak a [2,3,4], az [1,2,3,4] és az [1,2,3,4,5] tudásállapotokon lévő tanulók vannak felkészülve, ez a tanulók (2,96% + 13,89% + 7,87%) = 24,7%-a. Az ilyen módon számolt százalékokat tartalmazza az 5. táblázat.



16. ábra
A nagyvárosi tanulócsoport tanulóinak százalékos megoszlása a szakértői tudásszerkezet tudásállapotai között

5. táblázat. Az egyes feladatok sikeres megoldásához szükséges új tudás befogadására felkészült tanulók részaránya a teljes tanulócsoporthoz viszonyítva

Tanulócsoport	*1. feladat*	*2. feladat*	*3. feladat*	*4. feladat*	*5. feladat*	*6. feladat*
nagyvárosi	19,1 %	31,7 %	18,0 %	**35,6 %**	25,4 %	24,7 %
kisvárosi	21,1 %	**49,7 %**	5,1 %	28,1 %	36,9 %	19,4 %

A táblázat adataiból látható, a nagyvárosi tanulócsoport esetén a tanulók legnagyobb hányada a (4) feladat, a kisvárosi tanulócsoport esetén viszont a (2) feladat megoldásához szükséges új ismeret elsajátítására van felkészülve. Ez azt jelenti, hogy a tanítási folyamat akkor lehet a legeredményesebb, ha az első tanulócsoportnál a (4)-es, a másodiknál a (2)-es feladat megoldását beszéli meg a tanár a tanulókkal. Azt a feladatot (itemet), amelynek tárgyalásával célszerű folytatni a tanulócsoport oktatását *kritikus feladat*nak (vagy kritikus itemnek) nevezzük (*Tóth* és mtsai, 2006).

Összefoglalás

Az utóbbi évtizedekben kidolgozott tudástér-elmélet új lehetőséget nyit a tudásszerkezet, a tudás szerveződésének vizsgálatában. A tudástér-elmélet alapfeltevése szerint, ha egy tanuló meg tud oldani egy, a feladathierarchiában magasabb szinten álló feladatot, akkor várható, hogy minden olyan feladatot meg tud oldani, amely a hierarchiában e feladat alatt helyezkedik el. Ebből az alapfeltevésből kiindulva megadhatjuk egy tudástérben lévő ismeretek (feladatok) szakértői hierarchiáját, és abból levezethetjük a szakértői tudásszerkezetet. A szakértői tudásszerkezet ismeretében megállapíthatjuk az egyes tanulók legvalószínűbb tudásállapotát és megmondhatjuk azt is, hogy eddigi tudásuk alapján milyen új tudás befogadására vannak előkészítve.

A tudástér-elmélet alapfeltevéséből kiindulva, figyelembe véve a tudás instabilitását is, meghatározhatjuk egy-egy tanulócsoport jellemző tudásszerkezetét. A tudásszerkezet alapján megkereshetjük a tanulócsoportra leginkább jellemző tanulási utat, azaz a tudástérben lévő ismeretek tanulásának jellemző sorrendjét. Ugyancsak a tudásszerkezet alapján megalkothatjuk a tanulócsoportra legjellemzőbb feladathierarchiát, a tudás szerveződésének legvalószínűbb modelljét. A tanulócsoport tudásszerkezetének, a jellemző tanulási útnak és a tudás szerveződését modellező feladathierarchiának az elemzése, más tanulócsoportokéval, illetve a szakértőkével való összevetése lehetőséget teremt a tudásszerkezet és a tudás szerveződése változásának tanulmányozására is. A szakértői tudásszerkezet és a válaszszerkezet alapján megállapíthatjuk a tudástér legkritikusabb feladatait, fogalmait, melyek elsajátításához a tanulócsoport legtöbb tagja rendelkezik a szükséges előismeretekkel.

Ebben a közleményben az individuális vizsgálatok példájaként az ALEKS nevű oktató-értékelő programot, a kollektív vizsgálatokra pedig két gimnázium 9–10. osztályos tanulóinak alapvető fizikai és kémiai mennyiségek ismeretével és alkalmazásával kapcsolatos felmérésünk eredményét és értékelését ismertettük.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki *Mare Taageperának* (University of California at Irvine, USA), aki először alkalmazta a tudástér-elméletet kémia-didaktikai kutatásokban, és előadásaival, cikkeivel felkeltette a szerző érdeklődését a téma iránt. A tanulmány „A tanulók fogalmi fejlődése és fogalmi váltása a kémia tanítási-tanulási folyamatában” című T-049379 sz. OTKA pályázat támogatásával készült.

Irodalom

Albert, D. (1994. szerk.): *Knowledge Structures.* 2006. júniusi megtekintés, Cognitive Science Section University of Graz. http://wundt.uni-graz.at/publicdocs/publications/ albert1994.pdf

Albert, D. és Held, T. (1994): Establishing knowledge spaces by systematical problem construction. In: Albert, D. (szerk.): *Knowledge Structures* . 2006. júniusi megtekintés, Cognitive Science Section Graz. wundt.uni-graz.at/publicdocs/publications/albert1994.pdf 78–111.

Arasasingham, R., Taagepera, M., Potter, F. és Lonjers, S. (2004): Using knowledge space theory to assess student understanding of stoichiometry. *Journal of Chemical Education*, **81**. 10. sz. 1517–1523.

Arasasingham, R., Taagepera, M., Potter, F., Martorell, I. és Lonjers, S. (2005): Assessing the effect of web-based learning tools on student understanding of stoichiometry using knowledge space theory. *Journal of Chemical Education*, **82**. 8. sz. 1251–1262.

Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Dobi János (2002): Megtanult és megértett matematikatudás. In: Csapó Benő (szerk): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest. 177–199.

Doignon, J-P. és Falmagne, J-C. (1999): *Knowledge Spaces.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Falmagne, J-C., Doignon, J-P., Cosyn, E. és Thiéry, N. (2006): The assessment of knowledge, in theory and in practice. Aleks Corparation. www.aleks.com/aleks/science_Behind_ALEKS. pdf

Falmagne, J-C., Doignon, J-P., Koppen, M., Villano, M. és Johannesen, L. (1990): Introduction to knowledge spaces: How to build, test, and search them. *Psychological Review*, **97**. 2. sz. 201–224.

Kagan, S. (2001): *Kooperatív tanulás*. Ökonet Kft. Budapest. 11–17.

Kiss Edina és Tóth Zoltán (2002): Fogalmi térképek a kémia tanításában. In: Tóth Zoltán (szerk.): *Módszerek és eljárások 12*. 63–69.

Lloyd, G. (é. n.): *hDA* 2006. júniusi megtekintés, hda.gaelanlloyd.com.

Potter, F. (2004): *Simplified version of KST analysis*. 2006. június. University of. California at Irvine chem.ps.uci.edu/~mtaagepe/ KSTBasic.html

Taagepera, M. és Noori, S. (2000): Mapping students' thinking patterns in learning organic chemistry by the use of knowledge space theory. *Journal of Chemical Education*, **77**. 9. sz. 1224–1229.

Taagepera, M., Arasasingham, R., Potter, F., Soroudi, A. és Lam, G. (2002): Following the development of bonding concept using knowledge space theory. *Journal of Chemical Education*, **79**. 6. sz. 756–762.

Taagepera, M., Potter, F., Miller, E. G. és Lakshminarayan, K. (1997): Mapping students' thinking patterns by the use of knowledge space theory. *International Journal of Science Education*, **19**. sz. 283–302.

Taber, K. (2002): *Chemical misconceptions – prevention, diagnosis and cure. Volume I: Theoretical background*. Royal Society of Chemistry, London.

Takács Viola (1997): A tudásszerkezet mérése. *Iskolakultúra*, **7**. 6–7. sz. Melléklet.

Takács Viola (2000): *A Galois-gráfok pedagógiai alkalmazása.* Iskolakultúra, Pécs.

Tóth Zoltán (2006): Középiskolás tanulók alapvető fizikai és kémiai mennyiségek ismeretével és alkalmazásával kapcsolatos tudásszerkezetének vizsgálata tudástér-elmélet segítségével. **14**. 2 sz. 12–21.

Tóth Zoltán és Kiss Edina (megjelenőben): Using particulate drawings to study 13–17 year olds' understanding of physical and chemical composition of matter as well as the state of matter. *Practice and Theory in Systems of Education*s.

Tóth Zoltán, Dobóné Tarai Éva, Revákné Markóczi Ibolya, Schneider I. K. és Oberländer F. (közlésre benyújtva): Using interview based knowledge space theory to assess 1st graders' prior knowledge about water.

ABSTRACT

ZOLTÁN TÓTH: THE ASSESSMENT OF KNOWLEDGE STRUCTURES USING KNOWLEDGE SPACE THEORY

This paper summarises the basic concepts of knowledge space theory developed by *Falmagne* and *Doignon.* Based on the surmise relation, the expert hierarchy of the subset of questions or problems constituting the knowledge space can be constructed. From this, an expert knowledge structure can be derived which, in turn, serves to establish the most probable knowledge state for a student. Knowing this characteristic knowledge state, two important questions can be answered: „What can the student do?" and „What is the student ready to learn?" Knowledge space theory is also suitable for determining the most characteristic knowledge structure for student groups as well as the critical learning pathway and the hierarchy of the characteristic problems. These offer the possibility to monitor the changes in the cognitive structure in the process of education. Relating expert knowledge structure and students' response structure, the critical items can be identified and the question what the majority of students are ready to learn can be answered. This paper presents two applications of knowledge space theory. The methods for constructing knowledge structure as well as obtaining the critical learning pathway, the characteristic hierarchy of problems and the critical problems are discussed in detail, using a study of high school students' understanding and application of basic physical and chemical quantities as an example.

Magyar Pedagógia, **105**. Number 1. 59–82. (2005)

Levelezési cím / Address for correspondence: Tóth Zoltán, Debreceni Egyetem TTK, Kémia Szakmódszertani Részleg, H–4010 Debrecen, Pf. 66.