MAGYAR PEDAGÓGIA
99. évf. 1. szám 3–21. (1999)

ISKOLAI MATEMATIKAI BIZONYÍTÁSOK ÉS A BIZONYÍTÁSI KÉPESSÉG

Csíkos Csaba
József Attila Tudományegyetem, Pedagógiai Tanszék

A matematikatanítás módszertanának egyik sokat vitatott területe a matematikai bizonyítások tanítása. A bizonyítások jórészt hangsúlytalanul vannak jelen a matematikatanításban; az érettségin egy-két tételt „le kell vezetni". Szükség van-e egyáltalán a bizonyításokra, vagy csak valami nemes hagyomány okán kapnak helyet a matematika tantervekben? Tapasztalatok szerint a tanulók nem kedvelik a bizonyításokat. Az okok között szerepelhet az, hogy – *Lakatos* (1976/1981) szerint – „tekintélyelvű deduktivista stílus" uralja a tankönyveket és az iskolai oktatást. Egy másik lehetséges ok az életkori jellemzők, a tanulók értelmi fejlődése által szabott lehetőségek és korlátok figyelmen kívül hagyása.

Véleményünk szerint a bizonyításoknak az úgynevezett bizonyítási képesség fejlesztésének szolgálatában kell állniuk. A bizonyítási képesség meghatározására több megközelítésmód is kínálkozik: Definiálhatjuk „egyszerűbb" – valamelyik klasszikus képesség-nevezéktanban leírt – képességek eredőjeként. Egy másik lehetőség az úgynevezett természetes logikai megközelítésmód, amely szerint a bizonyításokban felhasznált következtetési szabályokból indulunk ki. Mi egy harmadik utat választunk: A bizonyítások struktúrája önmagában alkalmas keretet nyújt a tapasztalati szinten vizsgálódó kutató számára. Ez a struktúra három változóval jellemezhető: (1) a bizonyítandó állítás, (2) a bizonyítás során felhasznált axiómák és korábban már bizonyított állítások, és (3) a bizonyítás során használt következtetési szabályok. Valamely állítás igazságértéke igazolásának képességét nevezhetjük bizonyítási képességnek; függetlenül attól, hogy milyen állítást kell igazolni, milyen más állításokat és következtetési szabályokat használunk fel.

A tanulmány célja az, hogy az iskolai matematikai bizonyításokkal kapcsolatos elméleti alapvetések és empirikus eredmények áttekintésével közelítsünk a bizonyítási képességhez; ahhoz a képességhez, amely lehetővé teszi, hogy bizonyításokat adjunk adott problémára – legyen az matematikai vagy az élet bármely más területéről való.

Képesség-jellegű tudás és az iskola

A pedagógián belül többször is hangsúlyeltolódás volt megfigyelhető abban a kérdésben, hogy vajon az ember által megtanult információk lényegesebbek-e, vagy az információk működésbe hozását, alkalmazását lehetővé tevő programok. *Csapó* (1992) kifejezésével élve, a tudás *ismeret- és képesség-jellegű komponensei*nek mesterséges szembeállításáról van szó. Pedagógiai szempontból igen jelentős kérdés, hogy a tanítás-tanulás különböző szakaszaiban (ide értve a tantervkészítést és a pedagógiai értékelést is) melyik komponensre kerül a hangsúly.

Számos kutatás vizsgálta, hogy milyen jellegű különbségek vannak egy adott szakma vagy speciális terület legkiválóbb művelői (experts) és a kezdők (novices) között. A legjobb sakkozó sem ismeri jobban a sakkjáték szabályait, mint egy ügyes kezdő, de a memóriában jelen lévő sok tízezernyi sakk-állás (pontosabban, *Simon* (1982) kifejezését használva: a feltételes cselekvésekből álló összetétel-rendszerekkel egyenértékű több tízezer struktúra) lehetővé teszi a gondolkodási idő rövidítését, a „lényeglátást". *Cauzinille-Marméche* és *Didierjean* (1998) – kísérletükben sakkproblémákat alkalmazva – megmutatták, hogy a problémamegoldás általános alapelveinek ismerete nemcsak problémák nagyobb csoportjában teszi lehetővé az eredményes megoldást, hanem a memorizálásban is óriási előnyt jelent.

Nyilvánvaló, hogy minden szakma eredményes műveléséhez nélkülözhetetlen egy speciális ismerethalmaz. Az is vitathatatlan azonban, hogy a tudás megszerzéséhez, működtetéséhez, valamint jelentős gyarapításához képesség-jellegű tudáselemek működésére van szükség.

Nem lehet a közoktatás feladata speciális szakmai ismeretek közvetítése, és az iskolai tananyag ismeret-jellegű része a tanulók többsége számára nem közvetlenül felhasználható a későbbi munkája során. Ebből könnyen arra a leegyszerűsítő következtetésre lehet jutni, hogy bármilyen, a tanulók életkori sajátosságait figyelembe vevő ismeretanyag alkalmas a képesség-jellegű tudás megszerzésének elősegítésére. Valójában azonban jelentős kutatási feladat annak megállapítása, hogy milyen tartalmak, milyen ismeretek a legalkalmasabbak a képességek fejlesztésére, és milyen ismeretelemek hiánya nehezíti meg más ismeretek megtanulását vagy képesség-jellegű tudáselemek elsajátítását.

Gondoljunk arra, hogy a ma általános iskolás diákok egy-két évtized múlva kerülhetnek majd vezető pozícióba a gazdasági, tudományos vagy politikai életben. Ma szinte semmit sem tudunk arról, hogy milyen ismeretekre lesz szükség akkor a hatékony munkához. Azonban, az igazat megvallva, azt sem tudhatjuk ma, hogy milyen képességekre lesz szükség a jövő század közepe felé. Ezen a téren talán nem várhatók olyan jelentős változások, mint az ismeretekkel kapcsolatban, de abban biztosak lehetünk, hogy a tudás fontos eleme lesz a tudás megszerzésének képessége; annak tudása, hogy mit tudunk és mit nem; és amit tudunk, az hogyan kapcsolódik más ismereteinkhez, képességeinkhez.

Matematikai bizonyítások és a tanterv

A Nemzeti Alaptanterv (1995) Matematika műveltségi területének általános fejlesztési követelményei között találjuk a következőket:

- Deduktív következtetések, néhány lépéses bizonyítások;
- Sejtések, szabályszerűségek megfogalmazása;
- A definíciók és tételek megkülönböztetése, feladatokban való alkalmazása (NAT, 72. o.).

A részletes követelményeket áttekintve érdekes változásra bukkanunk az 1978-as általános iskolai tantervhez képest. A Pitagorasz-tétel megfordítása akkor a 7. osztály anyagában és követelményei között szerepelt, a NAT alapján a „tétel és megfordítása" – a gondolkodási módszerek részterületen belül – a 10. évfolyam végének követelményei közé tartozik. A változás annak köszönhető, hogy a NAT készítése során sok száz tanár véleményét és tapasztalatát is figyelembe vették. Úgy gondoljuk, további kutatásokkal – a tanulók gondolkodásának még pontosabb megismerésével – hasonló problémák esetén empirikusan megalapozott válaszokat tudunk majd adni.

A matematika tananyag meghatározásának csupán egyik forrása a szakmódszertan, a pedagógiai-pszichológiai tapasztalatok. Másrészről – mint minden tantárgy esetén, amely valamely tudományág iskolai reprezentánsának tekinthető – figyelembe kell venni az adott szaktudomány álláspontját is. Az ötvenes-hatvanas években kibontakozó „*Új Matematika*" mozgalom a matematika pontosabb tükröződését kívánta elérni a formális logika és a precíz, formális bizonyítások hangsúlyozásával (*Hanna*, 1995). *Hanna* (1989) véleménye szerint az ennek hatására megváltozott iskolai tárgyalásmódból következik, hogy sokan úgy vélik, a teljes szigor a matematikai gyakorlat lényege. Az iskolában a matematikai eredmények – ugyanúgy, mint a matematikusok számára publikált eredmények – tételek és bizonyítások formájában jelennek meg.

Az 1989-ben kiadott amerikai *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Tantervi és értékelési standardok az iskolai matematika számára) az autoriter oktatási stílus ellenpontozásaként hangsúlyozza (ld. *Edwards*, 1997), hogy a matematikai gondolkodás nem korlátozódik a formális bizonyításokra, és a matematikai gondolkodás elsajátítása *minden* matematikát tanuló számára megfelelő cél.

Mit jelent a bizonyítás a matematika tudományában és mit jelent az iskolában?

A matematikai bizonyításfogalom hosszú történeti fejlődés során alakult ki (*Kleiner* és *Movshovitz-Hadar* 1997; *Hanna* és *Jahnke*, 1993; *Hanna* 1996; *Wilder*, 1944). *Tarski* (1990) szerint „a XIX. század utolsó éveiig… a bizonyítás olyan szellemi tevékenységnek számított, amelynek célja meggyőzni önmagunkat és másokat egy mondat igazságáról" (380. o.). A XIX. és különösen a XX. század során a bizonyítások formalizálásával azt igyekeztek elérni, hogy egy állítás igazsága csak az axiómáktól és a következtetési szabály(ok) jóságától függjön, és ne a bizonyítási folyamattól. Ez a megingathatatlannak vélt alapelv azonban sok irányból veszélyeztetve van. Nem elsősorban a *Szász* (1972) által matematikai vadhajtásnak nevezett intuitív matematikára gondolunk, amelyben az arisztotelészi kétértékű logika elemi szabályai sem érvényesülnek, hanem a számítógépes bizonyításokra, az úgynevezett holografikus bizonyításokra és az experimentális matematikára (*Hanna,* 1995, 1996; *Hersh*, 1993; *Markel*, 1994).

A szigorú értelemben vett matematikai bizonyításfogalomban axiómák, következtetési szabályok halmazai szerepelnek, és véges sok lépésben kell eljutni ezek segítségével a bizonyítandó állításhoz. Ilyen formában leírt bizonyításokkal nagyon ritkán lehet találkozni. Ennek egyik oka, hogy ezek rendkívül terjedelmesek. Egy másik fontos tényező, hogy a bizonyítások szerepe nem kizárólag az, hogy az állítás igazságát bizonyítsák, hanem az, hogy a fogalmak, korábban ismert tételek kapcsolatait megvilágítsák, a megértést elősegítsék.

A matematika egyik mérföldkövének tekinthető a négyszín-probléma számítógépes bizonyítása. (Régóta ismert volt a sejtés, hogy bármilyen szokványos térkép kiszínezhető legfeljebb négy színnel úgy, hogy a szomszédos „országok” területe eltérő színű legyen.) A problémát számítógép segítségével oldották meg, tisztán formálisan; sokak ellenérzését kiváltva ezzel. *Halmos* (idézi *Hersh*, 1993) szerint ez nem jó bizonyítás, mert nem láttatja, hogy *miért* igaz a tétel. A jó bizonyítás megfelelő fogalmakat használva nem lehet túlságosan hosszú. *Halmos* véleménye szerint: „Úgy gondolom, 100 év múlva a négyszín-tétel elsőéves hallgatók gyakorló feladatává válik, amely a megfelelő fogalmak felhasználásával néhány oldalon bizonyítható lesz.” (393. o.)

Thurston (1995) is amellett érvel, hogy az emberek „nem válaszok valamiféle gyűjteményét akarják – amit akarnak, az a *megértés*” (29. o.). *Otte* (1994) szerint a bizonyításnak nem elég bizonyítani, az is elvárás, hogy általánosítson, fejlessze az intuíciót és az elme számára új területeket hódítson meg.

A matematika tudományának bizonyításfogalma nem tükrözi azt, hogy milyen pszichikus folyamatok játszódnak le egy új tétel felfedezése és bizonyítása során. Matematikusok (pl. *Newton, Hölder, Poincaré*, *van der Waerden*) önreflexiói, visszaemlékezései alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a tényleges gondolkodási folyamatok alapvetően különböznek attól, amit a végső, formális bizonyítás tükröz (ld. *Dreyfus* és *Eisenberg*, 1996; *Hanna* és *Jahnke*, 1993). Adódik a következtetés: ha a matematikus nem olyan módon jut el egy tételhez, ahogyan a bizonyítás fölépül, akkor az iskolában is világossá kell tenni, hogy a bizonyítás lépései nem a felfedezés lépéseit jelentik.

Többen is hangsúlyozzák azt a funkcionális különbséget, amely a matematikusok bizonyításai és az osztálytermi bizonyítások között fennáll. Az első esetben a *meggyőzés* funkciója domborodik ki, ellentétben az osztálytermi bizonyítások *magyarázó* szerepével (*Hersh*, 1993; *Chazan*, 1993).

Az osztálytermi magyarázó funkció a megértést elősegítő, a „Miért?” kérdésre választ adó szerepet jelöl. *Battista* és *Clements* (1995) véleménye szerint „A formális bizonyítás csak olyan mértékben megfelelő, amilyen mértékben a tanulók használni képesek azt arra, hogy gondolatokat jelentéssel bíró módon (meaningfully) igazoljanak vele” (51. o.). Sokak véleménye szerint valójában a matematikatudományi bizonyítások is akkor jók, ha nem csupán az állítás igazságát mutatják meg, hanem választ adnak arra a kérdésre is, hogy miért igaz a tétel. *Hanna* (1995) ezért úgy véli, hogy a bizonyítások iskolai használata valójában *anti-autoritárius*.

Fontos kutatási feladat annak vizsgálata is, hogy a tanulók hogyan gondolkodnak a matematikai bizonyításokról. *Hoyles* (1997) csaknem 2500 tanuló véleményét gyűjtötte össze arról, hogy mit jelent számukra a matematikai bizonyítás. Az egyik tipikus válasz a következő volt: „Minden, amit a bizonyításról tudok, az az, hogy amikor megtalálod a választ, akkor kell valami bizonyíték, ami azt támogatja, és ez a bizonyítás. Bizonyítani kell, hogy egy egyenlet mindig működik.” (11. o.) *Hoyles* szerint a tanulók válaszai a tantervi felépítést tükrözik vissza; csak a matematikai tevékenység egy típusa esetén szükséges a bizonyítás.

A tanulók bizonyításokról alkotott felfogását *Chazan* (1993) egy geometriai oktatószoftver (Geometric Supposer) használatán keresztül vizsgálta. A későbbiekben kitérünk majd a bizonyítások tanításával kapcsolatos alapelvekre; most azt emeljük ki, hogy a tanárok különösen nehéznek tartják az induktív, felfedeztető munka és a deduktív bizonyítások összekapcsolását, integrálását. *Chazan* szerint az empirikus, verifikáló érvelés és a deduktív bizonyítások egymás mellé helyezése okozhatja, hogy a tanulók mindkét érvelési forma értékét és fontosságát megkérdőjelezik. A vizsgálat eredményei szerint sok tanuló a nyilvánvalóvá tételt matematikai bizonyításnak tekinti, míg mások (ellenkezőleg) a deduktív bizonyításokat sem tartják elegendőnek a nyilvánvalóvá tételhez. Mindkét esetben megfigyelhető a szkepticizmus, miszerint a deduktív bizonyítások nem védenek a kivételek, az ellenpéldák ellen. *Chazan* szerint a tanulók matematikai bizonyításokról kialakult képe – az oktatással szembeni rezisztencia tekintetében – a természettudományos tévképzetekhez hasonlít.

A leendő tanárok bizonyítással kapcsolatos koncepcióit kutatva *Martin* és *Harel* (1989) azt találta, hogy több, mint 50%-uk matematikailag korrektnek ismeri el az induktív bizonyításokat, és az elfogadottság mértéke nem függött a tartalom ismertségétől. Véleményük szerint a bizonyításokról kialakult kép a matematikatanár által közvetített képnek felel meg. *Kárteszi* (1972. 59. o.) a jelenséget a „tanárról tanárra szálló hagyományok kritika nélküli átvétele” kifejezéssel illeti. *Martin* és *Harel* ezenkívül kiemelik a bizonyításokról kialakult kép „ritualisztikus” vonását, amely feltehetőleg a formalista tanításmód gyümölcse.

Almeida (1995) bizonyításokkal kapcsolatos állításokat ötfokozatú skálán (2=erősen egyetért, 1=egyetért, 0=nincs véleménye, −1=nem ért egyet, −2= erősen nem ért egyet) értékeltetett matematika szakos hallgatókkal. A kutató által feltételezett „ideális válaszhoz” képest helyenként igen nagy eltérések mutatkoztak. „A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak” állításra például az ideális –2 érték helyett 0,1-es átlag jött ki.

Az iskolai matematikai bizonyítások haszna

Ideje feltenni a kérdést: Mi az iskolai matematikai bizonyítások haszna? A képességjellegű tudásnál általánosságban elmondottakon túl azt állítjuk, hogy a bizonyítások a *NAT*-ban (ld. 70. o.) követelményeként megfogalmazott *rugalmas, fegyelmezett* gondolkodásra nevelés kiváló eszközei. A „rugalmas” és „fegyelmezett” közötti látszólagos ellentmondás úgy oldható föl, hogy a rugalmas gondolkodás *Dreyfus* és *Eisenberg* (1996) szerint a nagy matematikai felfedezésekhez mindig nélkülözhetetlen volt. Ha valami nem megy az egyik módon, meg kell próbálni másképp. Fegyelmezett gondolkodás szükséges ugyanakkor a matematikai fogalmak megértéséhez és megtanulásához. *Moore* (1994) szerint a bizonyításokban előforduló hibák legnagyobbrészt a fogalmak hiányos ismeretére, meg nem értettségére vezethetők vissza.

Movshovitz-Hadar (1988) szerint minden iskolai matematikai bizonyítás a tanulók számára a meglepetések forrása lehet. Szerinte nem hiba, ha egy tételt úgy fogalmazunk meg (akár kérdés formájában), hogy a bizonyítás meglepetést okozzon. (Például: „Mekkora lehet maximálisan egy háromszög belső szögeinek összege?”) Kiemeli (*Movshovitz-Hadar* és *Hadass*, 1990) a helytelen bizonyításokból származó látszólagos matematikai paradoxonok szerepét – legalábbis a felsőfokú matematika-oktatásban.

Pólya (1957) szerint a bizonyítások mnemotechnikai eszközt is jelentenek, azaz könnyebb az egyes fogalmak, ismeret-jellegű tudáselemek megtanulása, ha azok – valamely bizonyításon belül – egymáshoz kapcsolódnak, mivel a többrétű, gazdag kapcsolódási lehetőségek gyorsítják a gondolkodást és könnyebbé teszik a felidézést.

Hangsúlyozzuk, hogy nem a bizonyítások memoriterré degradálásáról van szó, hanem arról a többször megerősített kognitív pszichológiai tényről, hogy a memorizálás sikeressége nem egyszerűen az ingernek kitettség és a figyelem idejétől (ezért nem is az akarattól) függ, hanem sok más tényezőtől – közte a megjegyzendő dolgok asszociáltságától, szemantikai kapcsolataitól – is (ld. például *Parkin*, 1993).

Melyik matematikai területhez köthetők az iskolai bizonyítások?

A matematikával foglalkozók – talán kultúrtörténeti okokból is – elsősorban a geometriát tartják alkalmas terepnek a bizonyításokkal való ismerkedéshez. *Pólya* (1957) szerint: „Ha a diák nem ismerkedett meg némelyik speciális geometriai tétellel, nem mulasztott sokat; lehetséges, hogy ezekre a dolgokra később, az életben kevés szüksége lesz. De ha nem ismerkedett meg geometriai bizonyításokkal, akkor az igazi evidencia legjobb és legegyszerűbb példáit mulasztotta el, és elszalasztotta a legjobb lehetőséget arra, hogy megragadja a szigorú okoskodás lényegét. Ha a közoktatás céljai közé tartozik, hogy a diák elsajátítsa a szemléletes evidencia és a logikus gondolkodás lényegét, akkor ezt nem teheti meg a geometriai bizonyítások segítsége nélkül.” (164–166. o.)

A geometria tanításával kapcsolatban szélsőséges vélemények fogalmazódtak meg az elmúlt évtizedekben[1]: „Euclid must go!” – „Euclid may stay.” (Euklidesznek mennie kell – Euklidesz maradhat). Magyarországon talán senki nem vitatja, hogy az iskolában euklideszi geometriát kell tanítani. Érdemi vitára alkalmasabbak az olyan kérdések, hogy meddig menjünk vissza az alapokig az axiomatizálásban, hogyan lehet az elemi geometriai bizonyításokat a tananyag szerves részévé tenni (elkerülve, hogy „ma tételeket bizonyítunk…”).

Többen is féltik attól a geometriát, hogy a bizonyítások szolgálóleányává válik, és háttérbe szorul a térbeli gondolkodás, és más, a geometriával szintén asszociálható képességterületek (például a rajzkészség, a valós világ modellezése, esztétikai érzék) fejlesztése (*Hoffer*, 1981; *Sherard*, 1981).

Markel (1994) szerint a bizonyítások megismertetésére, gyakoroltatására igen alkalmas terep a számelmélet. Egyszerű paritásos, oszthatósági állítások segítségével a bizonyítások szerepe, struktúrája jól bemutatható. *Ambrus* (1993) az aritmetikai problémákat tartja az indirekt bizonyítások explicit bevezetésére alkalmas terepnek. Ami ebben az esetben hiányzik, az a geometria axiomákra alapozott felépítése. Mivel azonban az axiomákra visszavezetés – különösen a szemlélet, a táblai rajz alapján nyilvánvaló tételeknél – sokszor szükségtelen lehet, a számelméletet a maga implicit axiómáival igen alkalmasnak tarthatjuk a bizonyítások gyakorlására.

[1] Diendonné (1961) idézi Robitaille és Ganden (1989)

A geometria és a számelmélet mellett a trigonometria és diszkrét matematika tűnik a bizonyítások tanítása számára legalkalmasabb területnek (*Thompson*, 1991; *Thompson* és *Senk*, 1993).

Bizonyításfajták

A matematikai bizonyítások csoportosítása meglehetősen nehéz. Ismertek különböző, klasszikusnak tekinthető bizonyításfajták. *Wilder* (1944) – hangsúlyozva, hogy csak vázlatos áttekintésre vállalkozik – a következő típusokat említi: (1) matematikai (teljes) indukció, (2) példa, ellenpélda adása, (3) reductio ad absurdum, (4) konstruktív módszerek, (5) nem mindenki által elfogadott alapelvek, axiómák (kiválasztási axióma, kontinuum-hipotézis, transzfinit indukció).

Céljainknak egy olyan csoportosítás felelne meg, amely a bizonyítási folyamatban szerepet játszó gondolkodási képességek alapján csoportosítaná a bizonyításokat. Azért nehéz ilyen felosztást készíteni, mert a tanulók gondolkodását csak közvetett eszközökkel vizsgálhatjuk, és a feladatok megoldása során született eredményeket nemcsak a feladat és a feladatmegoldás kontextusa határozza meg, hanem az elméleti keret is, amelybe helyezve az eredményeket interpretáljuk. Ez utóbbi tényező kapcsán térünk ki most röviden a következtetési szabályok felőli megközelítés lehetőségére, majd a kutatások során használt feladatok hatását tekintjük át. Végül ismertetjük *Harel* és *Sowder* (1998) rendszerét, amely speciálisan a matematikai bizonyításokat kategorizálja, és hierarchiát állít föl az egyes típusokra vonatkozóan.

Következtetési szabályok felőli megközelítés

A bizonyításokat csoportosíthatjuk aszerint, hogy a bizonyítás során a pszichikum milyen következtetési szabályokat „használ”.

A matematikai bizonyításfogalom egyetlen következtetési szabályra, a *modus ponens*re[2] épül. A matematikai bizonyítások során használt más szabályok ugyanis visszavezethetők a modus ponensre. Ez a következtetési szabály az egyik legalapvetőbb, és bizonyíthatóan már egészen kicsi gyermekek is használják a következtetéses gondolkodásukban (ld. *Braine*, 1990).

Az emberi gondolkodás természetét vizsgáló kutatások egyik irányzata szerint („természetes logikai” megközelítésmód) az emberi pszichikum működése bizonyos logikai szabályok segítségével leírható (*Braine*, 1978, 1990; *Rips*, 1983, 1994; *Johnson-Laird* és *Byrne*, 1991). Létezik néhány szabály, amely minden külön logikai stúdium nélkül kialakul, és szinte hibátlanul működik minden ember pszichikumában. (A „pszichikumában” kifejezés használatával nem kívánunk állást foglalni abban a kérdésben, hogy vajon léteznek-e szabályok a fejünkben vagy sem.) Közös az elméletekben, hogy a *modus tollens*t[3] nem tüntetik fel a „természetes logikai” rendszer részeként. Számos kutatás

[2] „Ha p, akkor q” és „p” állításokból „q”-ra következtethetünk.
[3] „Ha p, akkor q” és „nem q” állításokból „nem p”-re következtethetünk.

alapján azt mondhatjuk, hogy ez a szabály valóban nem tartozik a könnyen alkalmazhatók közé (ld. például *Evans*, 1982).

Szintén közös jellemzője a „természetes logikai” elméleteknek, hogy csak logikailag valid (deduktív) szabályokkal foglalkoznak. *Rips* (1994) ezenkívül törekedett arra is, hogy rendszere logikai értelemben teljes legyen. A szabályokat (valójában számítógép-program eljárásait) két fő csoportra osztja: előre irányuló (forward) és hátra irányuló (backward) szabályokra. Az utóbbi típusba tartozók esetén ismert az elérni (mondhatjuk úgy: bizonyítani) kívánt állítás, és azokat a feltételeket keressük meg, amelyek esetében az fennáll.

Tágíthatjuk a bizonyítás során használt szabályok körét; *Hársing* (1981) felosztása szerint erős plauzíbilis, gyenge plauzíbilis, induktív és valószínűségi következtetésekkel. Az erős plauzíbilis következtetések (pl. a *redukció*[4] szabály) determinisztikus igazságában csak kevesen kételkednek (ld. *Evans*, 1982).

A matematikában és más területeken létező bizonyítások tipizálására azért nem alkalmas a következtetési szabályok felőli megközelítésmód, mert a bizonyítási tevékenység folyamata és annak végterméke gyakran nem állítható egymással párhuzamba. Nem tudjuk, hogy vannak-e szabályok a fejünkben, avagy a következtetési szabályok alkalmazása szabály-nélküli (ruleless) gondolkodási folyamatok végtermékének szavakba öntését jelenti csupán. Az utóbbi álláspont képviselőinek nagyon erős érvei vannak: Ismert például, hogy különböző tartalmú feladatok esetén módosul a szabály-használat. A modus tollenst a többség jól használja, ha ismerős, hétköznapi dolgokról van szó, és igen nehézzé válik a használat akkor, ha elvont tartalmakon kell használni. *Piaget* (idézi *Schliemann*, 1998) ezért mondta már csaknem három évtizede, hogy „legjobb, ha a fiatalt olyan területen teszteljük, amely közel áll szakmájához, érdeklődési területéhez”.

Feladattípus felőli megközelítés

A bizonyításfajták rendszerezéséhez egy másik kiindulási alap a bizonyítási képességet mérő feladatok rendszere. Óvatosságra int azonban, hogy az elmúlt három évtizedben – *Girotto* és *Light* (1993) szavaival élve – a kognitív fejlődés kutatásának „mikrovilágai” gyakran egyetlen „paradigma feladatra” összpontosítottak. Sok esetben megtörtént, hogy 6 évesek gyermekek kiválóan teljesítettek bizonyos feladatok megoldásában; más feladatokban pedig a felnőttek meglepően gyengén (*Moshman*, 1990). A lehetséges magyarázatok keresése egyrészt a metalogikai, metadedukciós elméletek (*Moshman*, 1990; *Johnson-Laird* és *Byrne*, 1991) megszületéséhez vezetett, másrészt előtérbe került a kontextuális, a szociális-kulturális tényezőket hangsúlyozó megközelítésmód. Ahogy többek között *Saxe, Dawson, Fall* és *Howard* (1996), valamint *Butterworth* (1993) rámutatnak, a feladat megoldása nagymértékben függ a feladatmegoldási szituáció, a kontextus értelmezésétől. (Például: a tanár nem azért kérdez, mert nem tudja a választ.)

A feladat-jellemzők közül nagyon fontosnak tartjuk a feladat megfogalmazását, amely elsősorban a feladatot kitűző szándékait, az általa várt megoldást tükrözi. A bizonyítandó állítás igazságértéke szerint két eset van; és két esetet különíthetünk el aszerint

[4] „Ha p, akkor q” és „q” állítások alátámasztják „p” igaz voltát.

is, hogy a feladat szövege egyszerűen az állítás igazolását kéri-e, vagy „igaz-e" kifejezést is tartalmaz. Ez utóbbi esetben a megoldó többletfeladata az állítás igazságértéke melletti állásfoglalás (1. táblázat).

1. táblázat. Példák az állítás igazságértéke és a feladatkitűzés módja szerinti feladattípusokra

	felszólító	*kérdező*
igaz állítás	„Bizonyítsd be, hogy nem minden prímszám páratlan!"	„Igaz-e, hogy nem minden prímszám páratlan?"
hamis állítás	„Igazold, hogy minden prímszám páratlan!"	„Igaz-e, hogy minden prímszám páratlan?"

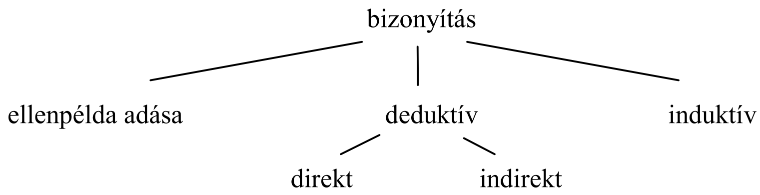
Általában igaz állítás felszólító, hamis állítás pedig kérdező típusú feladatban szerepel. Ehhez a tanulók is hozzászoknak, és kérdező feladatnál legtöbbször cáfolni igyekeznek az állítást, ezért igaz állítás szerepeltetése kérdező feladatban félrevezető lehet. Még inkább félrevezetőnek érezzük azt, ha hamis állítás felszólító feladatban szerepel. *Movshovitz-Hadar* és *Hadass* (1990) ezzel ellentétben hasznosnak tartják az ilyen feladatkitűzést is. Véleményük szerint a matematikatanítás alapelvei között szerepel, hogy „a hibázás lehetőségének szabadsága a matematikai tudás fejlesztésének alapját képezi", és „a hibás bizonyítás alapjául szolgáló helytelen logika megtalálása a hirtelen felismerés lehetőségét nyújtja" (266. o.).

Nem-hierarchikus bizonyítás-kategorizálás lehetősége

Ha a „klasszikus" (például a *Wilder* (1944) által említett) bizonyításfajtákat a következtetési szabályok és a feladattípusok szerinti megközelítésmód együttes figyelembevételével igyekszünk kategorizálni, a következőkben bemutatandó felosztáshoz juthatunk.

A bizonyításfajták közül az „ellenpélda adása" azzal különíthető el a többitől, hogy legtöbbször kérdező típusú, hamis állítást tartalmazó feladathoz kapcsolódik. Az induktív-deduktív dichotómia a bizonyításfajták elkülönítésében annyit jelenthet, hogy a bizonyítás tartalmaz-e plauzíbilis, induktív vagy valószínűségi következtetést, avagy nem. Az induktív bizonyításokat a matematikában hibás bizonyításnak tartjuk. Bár sok módszertani javaslat szól amellett, hogy az oktatás során járjuk be az induktív utat, keressünk analógiákat (ld. *Pólya*, 1988; *Saul*, 1992), alighanem szigorúnak kell lennünk annak megítélésében, hogy magában a matematikai bizonyításban elfogadhatók-e induktív lépések. A deduktív bizonyításokat direkt és indirekt bizonyításokra osztjuk. Indirektnek azt a bizonyítást nevezzük, amelyben – a bizonyítás legalább egy pontján – egy következtetés feltételeként szerepel a bizonyítandó állítás tagadása.

Az egyéb gyakran említett bizonyításfajták (verifikáció, falszifikáció, levezetés, teljes indukciós stb.) vagy fölöslegesen szaporítanák az osztályozás szempontjait (verifikáció-falszifikáció dichotómia), vagy valamelyik eddig említett bizonyításfajta alesetének tekinthetők; például a teljes indukciós bizonyítás a deduktív direkt bizonyítások közé sorolható. A bizonyításfajtákat az 1. ábrán összegezzük:



1. ábra
Bizonyításfajták a feladattípusok és tanulói válaszok felőli megközelítés alapján

A legnehezebb probléma a bizonyításkategorizálásban az induktív és deduktív bizonyítások elkülönítése. Ha ugyanis olyan kategóriákat szeretnénk kialakítani, amelyek megfeleltethetők pszichikus folyamatokat, akkor azt is figyelembe kellene venni, hogy a gondolkodó ember „induktívnak” vagy „deduktívnak” tartja-e bizonyítását.

Leszögezzük, hogy osztályozásunk – a bizonyítási képesség szempontjából – nem tartalmaz hierarchiát. Úgy véljük, az ember a saját maga által alkotott bizonyítások között sem képes rangsort felállítani. Döntéseink meghozatalánál gyakran induktív gondolatmenetekre támaszkodunk, a „kivétel erősíti a szabályt” hétköznapi alapelv pedig esetenként az „ellenpélda adása” bizonyításfajta értékét teszi kérdésessé. Érdemes megemlíteni, hogy deduktív bizonyítás is lehet matematikai értelemben hibás, például körben forgó okoskodás esetén.

Bizonyítássémák Harel és Sowder (1998) szerint

Az iskolai matematikai bizonyítások kategorizálása legtöbbször arra az implicit feltételezésre épít, hogy a bizonyítások valamilyen szempont vagy szempontrendszer szerint rangsorba állíthatók. Anglia és Wales Nemzeti Matematika Tantervében a bizonyítások a matematika alkalmazása témakörben kaptak helyet, és megadták a tantervkészítők, hogy milyen nehézségi szinthez milyen bizonyítások tartoznak: A 3-as szint követelménye az, hogy a tanuló megértse az általános állítást, és találjon olyan példát, amely megerősíti azt. A legmagasabb (8-as) szinten a tanulónak saját matematikai tevékenysége nyomán kapott állításokat kell tudnia megvizsgálnia a logika eszközeivel, és ennek eredményeképp tovább kell tudnia lépni az adott tevékenységben. *Hoyles* (1997) e tantervet bírálva rámutat, hogy „most már hivatalosan is igen nehezek a bizonyítások és csak a legrátermettebbek számára elérhetők.” (9. o.)

A hierarchikus bizonyítás-kategorizálás hátterében ott van az a feltételezés, hogy aki képes magasabb szintű bizonyítást adni, az képes alacsonyabb szintűt is, fordítva viszont nem. A hierarchikus és nem-hierarchikus kategória-rendszerek szembeállítása tehát feloldható, és a probléma átvihető a bizonyítások értékelésének területére.

Harel és *Sowder* (1998) a PUPA (Proof Understanding, Production, and Appreciation) Project keretében másod-, harmad- és negyedéves hallgatók bizonyítási sémáit vizsgálta változatos módszerekkel: többek között interjúk, egyéni és csoportos házi feladatok, tesztek felhasználásával. Az így megszülető hierarchikus rendszernek egy egyszerűsített változatát tekintjük most át:

I. Az externális, valamilyen külső forrásra, és nem az állítások közötti összefüggésekre alapozott bizonyítás-sémák. Ide tartozik az autoriter személyre hivatkozás, a rituális formakövetés és az értelem nélküli szimbólum-manipuláció.

II. Az empirikus bizonyítás-sémák közé a perceptuális (például geometriai ábrázolás alapján történő) és a konkrét példákon alapuló induktív bizonyítások tartoznak.

III. A matematika által kizárólagosan elismert bizonyítások (az analitikus bizonyítás-sémák) közé tartoznak a transzformációs és az axiomatikus sémák. A transzformációs bizonyítások már deduktív bizonyítások, amelyek során a célnak éppen megfelelő gondolkodási műveleteket használunk. *Harel* és *Sowder* szerint a transzformációs bizonyítások fontos előzményt jelentenek az axiomatikus bizonyítási sémák elsajátításához.

A bizonyítási képesség értékelése

Mit tegyünk az olyan (matematikai) bizonyítással, amelyben a tanuló mindent leírt, amit az órai mintabizonyításban a tanár a táblára fölvitt, ám nem lehet tudni, hogy a tanuló mit tekint kiinduló feltételnek, mit és milyen lépésekben bizonyít? Az összpontszám hány százaléka jár az ilyen bizonyításra? Avagy megfordítva: Ha az összpontszám felét adjuk a bizonyításra, akkor ez azt jelenti, hogy a „massza” fele megvan, vagy ez inkább a szükséges dedukciók felének meglétét jelzi?

Feltehetően hasonló problémák inspirálták az USA-ban egy ötfokozatú értékelési skála kidolgozását a tanulók által adott (geometriai) bizonyításokra (ld. *Senk*, 1985; *Thompson* és *Senk*, 1993):

- 0 – A tanuló nem ír semmit, leírja a feladatban megadott dolgokat, vagy érvénytelen és haszontalan dedukciókat ír.
- 1 – A tanuló legalább egy érvényes deduktív következtetést ír, indoklással.
- 2 – A tanuló bizonyságot tesz arról, hogy képes következtetések láncolatát használni, vagy úgy, hogy körül-belül a bizonyítás feléig eljut és megáll, vagy úgy, hogy következtetések sorozatát írja le, amely azonban az első lépésekben elkövetett hiba miatt nem érvényes.
- 3 – A tanuló olyan bizonyítást ír, amely logikailag helyes minden lépésében, de hibák fordulnak elő a jelölésben, a megszövegezésben vagy a tételek nevében.
- 4 – A tanuló jó bizonyítást ír, legfeljebb egy jelölésbeli hibával.

Hátrányt jelent, hogy a bizonyítások a tapasztalatok szerint nem egyforma nehezek, így furcsa lenne, ha mindig 4 pont lenne a maximum. Egy reprezentatív mintás mérés azonban segíthet abban, hogy az egyes bizonyítandó tételekhez nehézségi indexeket rendeljünk, és azzal szorozva súlyozzuk a feladatokat.

A bizonyítás egy bizonyítási stratégia melletti állásfoglalást is jelent. *Bettman, Johnson* és *Payne* (1990) szerint a döntési stratégia függ – többek között – a döntés jóságának igazolhatóságától (justifiability) és a stratégia alkalmazásához szükséges szellemi erőfeszítésektől is. Ez utóbbi tényező a költség/haszon elv megjelenését jelenti a gondolkodásban, és részben emiatt nem tudjuk, hogy a tesztelési helyzetben nyújtott teljesítmény milyen mértékben tekinthető a gondolkodási képesség indikátorának.

A matematikában az a jó bizonyítás, amely deduktív, és helytálló axiómákra, korábban bizonyított állításokra támaszkodik. Hétköznapi bizonyításokban ugyanakkor mindig az adott szituációtól függ, hogy hány lépésre, milyen következtetési szabályok és állítások felhasználására van szükség. Így a bizonyítás jósága attól függ, hogy elérte-e a célját: sikerült-e önmagunk vagy más(ok) számára nyilvánvalóvá tennünk egy állítást. Vagyis a bizonyítási képesség értékelése még nehezebb, ha a bizonyítás nem a matematika területéről való. Az általános értelemben vett bizonyítási képesség értékelésekor a matematika szempontjaira építő bizonyítás-kategóriákat vehetjük alapul: a bizonyítások értékeléséhez végső soron a matematika nyújthat támpontot. Ahhoz azonban, hogy más területek bizonyításait a matematika szempontjai alapján értékeljünk, *olyan tesztelési kontextusra, tesztelési módszerre van szükség, amellyel a tanuló által adható több lehetséges bizonyítás közül azt hozzuk felszínre, amely a matematikai alapú kategorizálás szerint a legmagasabb szintű.*

A bizonyítási képesség fejlesztése

A bizonyítási képességet tetszőleges állítások igazságértékének eldöntésére való képességként definiáltuk. Kérdés, hogy van-e olyan általános jellemvonása a bizonyításoknak, amelyek a fejlesztés alapelveinek meghatározására felhasználhatók. A bizonyítások a gondolkodásnak egy speciális formáját, mondhatni szintjét jelentik. „Bizonyosnak lenni valamiben és tudni azt, hogy miért vagyunk bizonyosak – ez két különböző dolog." – írta *Skemp* (1975) ma már klasszikusnak számító művében. Az ő szóhasználatával élve arról van szó, hogy a bizonyítások az intuitívvel szemben a reflektív matematikai gondolkodás szintjén vannak. Más tudás-nevezéktanokat alapul véve is megtaláljuk annak a gondolkodási szintnek leírását, amely a tudásról való tudást jelenti, legyen az akár a *Flavell*-i (1987) metakogníció vagy a *Nagy József* (1996) által használt explicit gondolkodás kifejezés.

A matematikatanítás éppen a bizonyítások által rendelkezik azzal a lehetőséggel, hogy a gondolkodás említett két szintjét a tantárgy jellegéből fakadóan megjelenítse. Ezért a matematikai bizonyítások a bizonyítási képesség fejlesztésének legkézenfekvőbb eszközét jelenthetik. A matematikatanítás felkészültségét e feladat betöltésére az is jelzi, hogy az iskolában nem azt bizonyítjuk, ami a szaktudomány szempontjából „theorema egregium"-nak minősül, hanem azt, aminek bizonyítása például a képességfejlesztés, a matematika esztétikumának bemutatása céljából fontos.

A következőkben a matematikai bizonyítások tanításának alapelveit tekintjük át. Mit kell bizonyítani és mit nem? Mi a hiányos bizonyítások szerepe? Hogyan köthető össze a matematikai tapasztalatok és a matematikai bizonyítások szintje? Miért kiemelkedően fontosak az indirekt bizonyítások?

Eléggé bő azon matematikai tételek köre, amelyeket bizonyítás nélkül taníthatunk az iskolában, és a bizonyítás hiánya nem okoz problémát. A tanulók bizonyítás nélkül is elhisznek, elfogadnak és alkalmaznak tételeket. (Elég az algebra alaptételére vagy a párhuzamos szelők tételének irracionális esetére gondolni.) Sok esetben az állítás nyilvánvaló, a szemlélet, a tapasztalat alapján evidens. *Kline* (idézi *Markel*, 1994) különösen óv attól, hogy a nyilvánvaló dolgokat olyan axiómákra támaszkodva bizonyítsuk, amelyek nem nyilvánvalóak. *Ambrus* (1993) elrettentő példaként említ egy orosz nyelvű tankönyvet, amely az „Egy egyenes tetszőleges pontjában az adott egyenesre egy merőleges állítható" tételt több, mint fél oldalon bizonyítja.

Mivel az iskolai bizonyítás szerepe elsősorban a magyarázat, a matematikai fogalmak kapcsolatainak megvilágítása, esetenként szükségtelenné válik teljes, precíz bizonyítást adni. *Pólya* (1957) szerint „A nem teljes bizonyítások a maguk helyén ízléssel alkalmazva hasznosak lehetnek" (166. o.). Különösen igaz ez akkor, amikor egy tétel második vagy harmadik bizonyítása kerül elő az órán. Tanulságos, hogy *Skovsmose* (1994) kutatása szerint sok tanuló úgy képzeli, hogy egy tételnek csak egy bizonyítása lehet. Aligha tévedünk nagyot, ha azt mondjuk, hogy ezt sok magyar tanuló is így gondolja; feltehetőleg a tekintélyelvű, deduktivista bizonyítások hatására.

Kilpatrick (ld. *Edwards*, in press) öt szintet különít el a tanulói bizonyítás-tanulás során. Szerinte először a kulcsszavakat és a bizonyítás ötletét kell memorizálni, és legvégül kialakul az a képesség, hogy a tanuló új szituációban is képes bizonyítást konstruálni. Ez az elképzelés a tradicionális oktatási helyzethez igazított elmélet. *Thurston* (1995) a régi elképzelések karikatúrájaként említi a DTP-modellt (definíció, tétel, bizonyítás szavak angol megfelelőiből alkotott mozaikszó). A mai modellek éppen *fordított sorrend*et teteleznek fel: először meg kell adni a lehetőséget a felfedezésre és absztrahálásra, és csak legvégül kell formális nyelvet használni a gondolatok közléséhez. „A gyerek számára … a matematika minden felépítése új, s az, hogy neki mi egyszerűbb vagy érthetőbb, nem nagyon mérhető azzal, hogy …matematikai neveltetésünk optikájával nézve mit látunk egyszerűbbnek vagy érthetőbbnek." – olvasható a *Cser* (1972, 308. o.) által szerkesztett módszertani könyvben.

A *Hodgson* és *Morandi* (1996) által leírt három fázis (felfedezés, magyarázat, formalizálás) az új felfogás esszenciáját jelenti. A matematikatanítás és a tanárképzés számára ez azt jelenti, hogy a *konvencionális tétel→bizonyítás→példák egymásutániság helyett példák→bizonyítás→tétel a helyes sorrend az oktatás folyamatában és a tankönyvekben is* (*Almeida*, 1995).

Ezzel teljes összhangban van *Nagy József* (1996) véleménye, aki szerint „a (tapasztalati) egyszerű bizonyító eljárások rendszeres használata az iskola valamennyi évfolyamán lehetséges, ami szilárdan megalapozhatja a bizonyítási képességet, a bizonyítás igényét" (61. o.). „A bizonyítási igény magától nem jön, ennek az igénynek a megjelenése nevelés eredménye" (*Sztoljár*, 1970. 209. o.). A probléma kulcsa feltehetőleg a tapasztalati és a formális szint közötti híd képzésében van elrejtve. Mikor, ki és hogyan fogalmazza meg az iskolában a kérdést: De *miért* igaz ez? A formális szintű bizonyítások iránti igény csak a tapasztalati szintre építve alakítható ki. Egyet kell értenünk *Nagy Józseffel* (1996), aki szerint „szavak és explicit nyelvtani szabályok alapján nem lehet beszélni, az implicit szabályrendszer birtokában viszont az explicit szabályok ismerete eredményesebbé teheti a nyelv használatát.” (70. o.) Igaz ez az állítás a „matematika nyelvére” is. A tapasztalati szint bejárásának egy viszonylag gyors és korszerű útját jelenthetik a számítógépes oktatóprogramok. *Edwards* (1997) szerint a számítógép segítségével történő „terület-felderítés” során a tanuló – a matematikushoz hasonlóan – intuitív módon keres összefüggéseket, sejtéseket fogalmaz meg és teszteli azokat, így készítve elő a terepet a bizonyítások számára.

A témánkhoz kötődő egyik ismert szoftver a Cabri nevű geometriai program, amely az euklideszi sík megismeréséhez nyújt segítséget. *Mariotti* (1998) abból kiindulva, hogy a geometriai szerkesztések problémája jó talajt biztosít a bizonyítások tanulásához, a Cabri programot használta kutatásában. A tanulóknak a szoftver segítségével kellett szerkesztési feladatot megoldani, majd igazolniuk a szerkesztés helyességét. A kísérlet azt igazolta, hogy a tanév tartama alatt jelentős előrelépés mutatkozott a szerkesztések hátterét jelentő tételek megértésében, de az is nyilvánvalóvá vált, hogy a szerkesztés helyességének igazolása spontán módon nem alakul át formális matematikai bizonyítássá.

Blum és *Kirsch* (1991) a szigorú (rigorous) bizonyítások szintjén belül elkülönítik egymástól a formális és a preformális bizonyításokat. Ez utóbbiak teljesen korrekt, deduktív, ám nem formalizált bizonyítások. Mivel sok tanuló számára a bizonyítások *rituális külsőségei* nehezítik a megértést, a preformális bizonyítások igen hasznosak a matematika több területén is.

Konior (1993) arra mutat rá, hogy a tankönyvi bizonyításokban szükség van a bizonyítás szerkezetét követő tagolásra. A tagolást biztosító eszközök lehetnek verbálisak (az úgynevezett delimitátorok, mint például „először megmutatjuk, hogy”, „ezzel igazoltuk a … formulát”) és nem-verbálisak, amelyek jól kiegészíthetik a verbális tagolást keretek, vonalak, térközök használatával.

A bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából kitüntetett szerepe van az indirekt bizonyításoknak; legalább három okból: (1) *Markel* (1994) szerint a felsőbb matematikai bizonyítások 75%-a indirekt, (2) ebből adódóan különös jelentősége van az arisztotelészi logika elfogadásának. Egyes matematikusok szerint (intuitív matematika) az állítás tagadásának cáfolata nem egyenértékű az eredeti állítással. (3) Az előzőekből következően kiemelt fontosságú feladat, hogy a tanulók elsajátítsák az indirekt bizonyítás technikáját; képesek legyenek feltételként használni egy állítás tagadását abban az esetben is, ha valójában az adott állítás igazolása a cél.

Inhelder és *Piaget* (1955/1984) a formális műveleti struktúrák kialakulását vizsgálva azt találták, hogy serdülőkorig a tanulók nem voltak képesek olyan hipotézisből kiinduló érvelésre, amely ellentmondott tapasztalataiknak. Ezzel teljesen összhangban *Szász* (1972) azt javasolja, hogy az indirekt bizonyítást olyan példán keresztül kell a tanulók elé tárni, amikor nem tűnik eleve lehetetlennek a bizonyítandó állítás tagadása sem (pl. $\sqrt{2}$ irracionalitása). Az indirekt matematikai bizonyításokkal kapcsolatos nehézségek a pedagógiai-pszichológiai kutatók előtt régtől ismertek. *Williams* (idézi *Thompson*, 1996) vizsgálata alapján a 11. évfolyamos tanulók 60%-a nem képes hipotézisként olyan állítást fölhasználni, amelyet hamisnak vél. (Holott ezek a tanulók már a Piaget-i formális műveletek szintjén gondolkodnak – legalábbis számukra ismerős, releváns témakörök esetén.) *Williams* (idézi *Thompson*, 1996) szerint az indirekt bizonyítások használatának szükséges feltétele a körben forgó okoskodás elkerülése. *Thompson* (1996) rámutat, hogy az indirekt bizonyításokhoz a bizonyítások természetének és jelentésének általános megértése mellett az is nélkülözhetetlen, hogy a tanuló képes legyen állítások tagadásának megfogalmazására. *Ambrus* (1993) kutatása szerint az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolájának vizsgált tanulói közül csak igen kevesen voltak képesek logikai műveletekkel összekapcsolt vagy kvantoros állítások tagadására.

Ami a matematikai bizonyításokkal kapcsolatban követelményként megfogalmazódik (pl. definíciók és tételek közötti különbségtétel képessége), minden olyan tantárgy minden olyan témakörére átvihető, ahol bizonyítások szerepelnek. Más tantárgyak ebből a szempontból annyiban különböznek a matematikától, hogy az axiómarendszer gyakran implicit módon, szubjektíven, egyénenkénti eltéréseket mutatva létezik. Maga a bizonyítási tevékenység azonban lényegében ugyanaz.

Kaiser (1993) néhány fizikai probléma kontrapozíciós és kontradikciós bizonyításával mutatja meg, hogy hogyan válhat egymást kölcsönösen segítővé a matematikai és fizikai gondolkodás.

A történelem tantárgy szintén alkalmas terepe a bizonyítási képesség fejlesztésének. A „történelemben nincsen ‘ha’ ” alapelv mindössze annyi korlátozást jelent, hogy direkt bizonyításokra kell szorítkozni. A *Bernáth* (1978) által szerkesztett módszertani könyv szerint „A szövegfeldolgozást deduktív megközelítésű feladatok is szolgálhatják.” A példaként említett feladat így szólt: „Bizonyítsuk be, hogy már az ősember is sikerrel védekezett természeti ellenfeleivel!” (415. o.) A feladat megoldása valóban bizonyítást jelent: adott állítás igazolását más állítások, axiómák és következtetési szabályok felhasználásával.

Összegzés

Tanulmányunkban kísérletet tettünk arra, hogy az iskolai matematikai bizonyításokból kiindulva, az azokkal kapcsolatos elméleti modellek és empirikus eredmények vázlatos áttekintésével vázoljuk a bizonyítási képesség fejlesztésének egy lehetséges megközelítésmódját.

A nemzetközi szakirodalom alapján elénk táruló kép azt mutatja, hogy a matematikatudomány bizonyítás-koncepciója tükröződik az iskolai tantervekben, és azokon keresztül az iskolai oktatásban. A bizonyítások iskolai jelenlétével, tanításával kapcsolatban mérvadónak tekinthető állásfoglalások a hagyományos definíció, tétel, bizonyítás, példák sorrend megfordítását javasolják. Az iskolai matematikai bizonyítások – bár jelenleg a matematika tantárgyban csak epizódszerepet játszanak – a bizonyítási képesség fejlesztéséhez a legkézenfekvőbb eszközt nyújthatják.

A bizonyítások értékelése számos problémát vet föl. A matematikai bizonyítások egyfajta hierarchikus rendszere általánosítható más területetek bizonyításainak értékelésére is. Alaphipotézisünk szerint: Aki képes – a matematikatudomány szempontjából – értékes (deduktív, formalizált) bizonyítást adni, az képes a hierarchia alacsonyabb fokán állót is konstruálni. Az értékelés fontos feladata megtalálni azt a tesztelési kontextust, tesztelési módszert, amely lehetővé teszi adott témakörben az elérhető legmagasabb szintű bizonyítás felszínre hozatalát.

Irodalom

Almeida, D. (1995): Mathematics undergraduates' perceptions of proof. *Teaching Mathematics and its Applications*, **14**. 171–177.

Ambrus András (1993): Indirekt argumentációk, indoklások, bizonyítások az iskolai matematikaoktatásban. In: *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* **1**. 29–40.

Battista, M. és Clements, D. H. (1995): Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, **88**. 48–54.

Bernáth János (1978, szerk.): *A történelem tanítása – gyakorlatok a történelemtanítás módszertanából*. Egységes jegyzet, Budapest.

Bettman, J. R., Johnson, E. J. és Payne, J. W. (1990): A componential analysis of cognitive effort in choice. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, **45**. 111–139.

Blum, W. és Kirsch, A. (1991): Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, **22**. 183–203.

Braine, M. D. S. (1978): On the relation between the natural logic of reasoning and standard logic. *Psychological Review*, **85**. 1–21.

Braine, M. D. S. (1990): The „natural logic" approach to reasoning. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey – Hove and London.

Butterworth, G. (1993): Context and cognition in models of cognitive growth. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Hove and London.

Carroll, J. B. (1993): *Human cognitive abilities. A survey of factor-analytic studies.* Cambridge University Press.

Cauzinille-Marméche, E. és Didierjean, A. (1998): Reasoning by analogy and memory for cases in the game of chess. In: Holyoak, K., Gentner, D. és Kokinov, B. (szerk.): *Advances in analogy research: Integration of theory and data from the cognitive, computational and neural sciences.* New Bulgarian University, Sofia. 231–236.

Chazan, D. (1993): High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, **24**. 359–387.

Csapó Benő (1992): *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Cser Andor (1972, szerk.): *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1996): On different facets of mathematical thinking. In: Stenberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *The nature of mathematical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates, 253–284.

Edwards, L. D. (1997): Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, **2**. 3. sz.

Edwards, L. D. (in press): Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. (Közlésre benyújtva a *Journal of Mathematical Behavior* folyóirathoz.)

Evans, J. St. B. T. (1982): *The psychology of deductive reasoning*. Routledge and Kegan Paul, London, Boston and Henley.

Flavell, J. H. (1987): Speculations about the nature and development of metacognition. In: Weinert, F. E. és Kluwe, R. (szerk.): *Metacognition, motivation, and understanding*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 21–29.

Girotto, V. és Light, P. (1993): The pragmatic bases of children's reasoning. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Hove and London.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, **9**. 20–23.

Hanna, G. (1995): Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics*, **15**. 42–49.

Hanna, G. (1996): The ongoing value of proof. In: *Proceedings of the 21th PME Conference*, Valencia, Spain, vol. 1, 21–34.

Hanna, G. és Jahnke, H. N. (1993): Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, **24**. 421–438.

Harel, G. és Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A. és Kaput, J. (Eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education* Vol. 7. American Mathematical Society, Washington, D. C., 234–283.

Hársing László (1981): *A tudományos érvelés logikája*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Hersh, R. (1993): Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, **24**. 389–399.

Hodgson, T. és Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three–step approach to proof. *Primus*, **6**. 49–57.

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, **74**. 11– 21.

Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approches to proof. *For the Learning of Mathematics*, **17**. 7–16.

Inhelder, B. és Piaget, J. (1955/1984): *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Johnson-Laird, P. N. és Byrne, R. M. J. (1991): *Deduction*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale. New Jersey.

Kaiser, M. J. (1993): Demonstrating proof by contrapositive and contradiction through physical analogs. *School Science and Mathematics*, **93**. 369–372.

Kárteszi Ferenc (1972): *A geometriatanítás korszerűsítéséről*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Kleiner, I. és Movshovitz-Hadar, N. (1997): Proof: A many-splendored thing. *The Mathematical Intelligencer*, **19**. 16–26.

Konior, J. (1993): Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, **24**. 251–256.

Lakatos Imre (1976/1981): *Bizonyítások és cáfolatok*. Gondolat, Budapest.

Mariotti, M. A. (1998): Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, **21**. 3. sz. 209–252.

Markel, W. D. (1994): The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics*, **94**. 291–295.

Martin, W. G. és Harel, G. (1989): Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematical Education*, **20**. 41–51.

Moore, R. C. (1994): Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, **27**. 249–266.

Moshman, D. (1990): The development of metalogical understanding. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Movshovitz-Hadar, N. (1988): School mathematics theorems – an endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics*, **8**. 3 (November) 34–40.

Movshovitz-Hadar, N. és Hadass, R. (1990): Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics*, **21**. 265–287.

Nagy József (1996): *Nevelési kézikönyv*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged.

Nemzeti Alaptanterv (1995). Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Budapest.

Otte, M. (1994): Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational* Studies *in Mathematics*, **26**. 299–321.

Parkin, A. J. (1993): *Memory*. Blackwell, Oxford (UK) – Cambridge (USA).

Pólya György (1957): *A gondolkodás iskolája*. Bibliotheca, Budapest.

Pólya György (1988): *Indukció és analógia*. Gondolat, Budapest.

Rips, L. J. (1983): Cognitive processes in propositional reasoning. *Psychological Review*, **90**. 38–71.

Rips, L. J.(1994): *The psychology of proof. Deductive reasonig in human thinking*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts – London.

Robitaille, D. F. és Genden, R. A. (1989, szerk.): *The IEA study of mathematics II.: Contexts and outcomes of school mathematics.* Pergamon Press, Oxford-New York etc.

Saul, M. (1992): Jewels in the crown. The beauty of inductive reasoning. *Quantum*, July/August 10–14.

Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R. és Howard, S.: Culture and children's mathematical thinking. In: Stenberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *The nature of mathematical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates, 119–144.

Schliemann, A. D. (1998): Logic of meanings and situated cognition. *Learning and Instruction*, **8**. 549–560.

Senk, S. L. (1985): How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, **78**. 448–456.

Sherard, W. H. (1981): Why is geometry a basic skill*? Mathematics Teacher*, **74**. 19–21.

Simon, H. A. (1982): *Korlátozott racionalitás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest.

Skovsmose, O. (1994): *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

Szász Gábor (1972): *Az axiomatikus módszer*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Sztoljár, A. A. (1970): *A matematikatanítás logikai problémái*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Tarski, A. (1990): *Bizonyítás és igazság*. Gondolat, Budapest.

Thompson, D. R. (1991): Reasoning and proof in precalculus and discrete mathematics. *Paper presented at the annual meeting of AERA*, Chicago.

Thompson, D. R. és Senk, S. L. (1993): Assessing reasoning and proof in high school. In: *Assessment in the mathematics classroom*. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, 167–176.

Thompson, D. R. (1996): Learning and teaching indirect proof. *Mathematics Teacher*, **89**. 474–482.

Thurston, W. P. (1995): On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **15**. 29–37.

Wilder, R. L. (1944). The nature of mathematical proof. *American Mathematical Monthly*, **51**. 309–323.

ABSTRACT

CSABA CSÍKOS: PROOFS IN SCHOOL MATHEMATICS AND THE ABILITY TO CONSTRUCT PROOFS

This study reviews some theories and empirical data concerning proofs in school mathematics and proving ability. After some theoretical considerations about the importance of cognitive abilities the paper focuses on the role of proofs in mathematics and in the school. It is hypothesized that there is a general proving ability that makes determining the truth-status of a statement possible by means of using other (formerly proven) statements and inference rules. Our basic assumption is that proofs in school mathematics can be the 'leaven' to foster the development of proving ability. Therefore special attention is paid to the principles of teaching proofs in school mathematics and to the difficulties the evaluation of students' proofs calls forth. Different approaches are discussed contrasting the 'old' DTP- (definition, theory, proof) model with the 'new' exploration-explanation-formalization models. From the point of view of educational evaluation there is an emphasis on arguing for the use of a hierarchical proof-categorization developed by Harel and Sowder.

Magyar Pedagógia, **99**. Number 1. 3–21. (1999)

Levelezési cím / Address for correspondence: Csaba Csíkos, Department of Education, Attila József University, H–6722 Szeged, Petőfi sgt. 30–34.

An English version of the paper can be obtained from the author.